Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 2

Jan Soukup

26-28.2.2024
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG2/

1 Párování

Tvrzení 1 (Tutte)**.** Graf G má perfektní párování právě tehdy, když pro každou $A \subseteq V(G)$ je počet lichých komponent v $G \setminus A$ menší nebo roven $|A|$.

*Dokonce obecněji platí, že velikost největšího párování v libovolném grafu G je rovna

$$\frac{|V(G)| - \max_{A \subseteq V(G)}(\mathrm{odd}(G \setminus A) - |A|)}{2}$$

kde $\mathrm{odd}(G \setminus A)$ je počet lichých komponent v $G \setminus A$.

Tvrzení 2 (Petersen)**.** Každý kubický (tedy 3-regulární) graf bez mostů má perfektní párování.

Příklad -1 (na hodině)**.** Nechť G je graf, kde každý vrchol má lichý stupeň. Ukažte, že pak pro libovolnou množinu $A \subseteq V(G)$ liché velikosti platí, že mezi A a $V(G) \setminus A$ vede lichý počet hran.

Příklad 0 (na hodině)**.** Dokažte Petersenovu větu ověřením Tutteovy podmínky (podmínka pro existenci perfektního párování) za pomoci předchozího příkladu.

Příklad 1. Najděte graf bez perfektního párování, který

a) je 3-regulární a souvislý (ale ne hranově 2-souvislý)

b) je 2-souvislý a má všechny stupně ≥ 3

Příklad 2. Dokažte Hallovu větu z Tutteovy. Například pomocí postupu níže (pro tu hlavní implikaci). Nechť bipartitní graf G má partity X, Y.

- Uvažme pomocný graf H, kde H vnikne z G, tak že nejdříve přidáme vrchol do Y, pokud byl počet vrcholů v G lichý (tak aby počet vrcholů v H byl sudý). A následně do podgrafu $H[Y]$ přidáme všechny hrany (aby byl úplný).
- Dokažte, že G má párování velikosti $|X|$ právě když H má perfektní párování.
- Dokažte, že pokud G splňuje Hallovu podmínku, tak H splňuje Tutteovu podmínku.
- Dokončete důkaz.

Příklad 3. Dokažte, že pro každou hranu kubického grafu bez mostů existuje perfektní párování, které ji neobsahuje.

Příklad 4. Dokažte, že každý k-regulární hranově $(k-1)$-souvislý graf na sudém počtu vrcholů má perfektní párování.

Příklad 5. Dokažte, že velikost největšího párování v libovolném grafu G je rovna

$$\frac{|V(G)| - \max_{A \subseteq V(G)}(\mathrm{odd}(G \setminus A) - |A|)}{2}$$

Hint: Může se hodit uvažovat pomocný graf, který z G vznikne tak, že přidáme $|V| - 2k$ vrcholů spojených se všemi originálními. A následně porovnávat párování velikosti k v původním grafu a perfektní párování v novém grafu.

Příklad 6. Nalezněte k-regulární hranově $(k-2)$-souvislý graf na sudém počtu vrcholů, který nemá perfektní párování. (Hint: Řešte alespoň pro sudá k, je to lehčí.)