Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 13

Jan Soukup

20.5.2024
`https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG2/`

1 Extremální kombinatorika

Systém $\mathcal{A}$ množin je *protínající*, jestliže $A \cap B \neq \emptyset$ pro každé $A, B \in \mathcal{A}$.

Tvrzení 1 (Erdős-Ko-Rado)**.** Jestliže $n \geq 2k$, pak protínající se systém k-prvkových podmnožin $[n]$ má velikost maximálně $\binom{n-1}{k-1}$.

Definice 1. *Slunečnice je kolekce množin takových že pro ně existuje množina S a všechny dvojice množin z kolekce mají průnik právě S. Každá množina z kolekce se nazývá lístek.*

Tvrzení 2 (Slunečnicové lemma)**.** Nechť l and p jsou kladná celá čísla, a nechť $\mathcal{A}$ je kolekce množin taková, že

- $\forall A \in \mathcal{A} : |A| \leq l$ a
- $|\mathcal{A}| > (p-1)^l l!$.

Pak existuje slunečnice $S \subseteq \mathcal{A}$ s p lístky.

Definice 2.

$$\mathrm{ex}(H, n) = \max\{|E(G)| : |V(G)| = n, H \nsubseteq G\}$$

Definice 3. Turánův graf $T_k(n)$*: Úplný k-partitní graf s n vrcholy, každá část má velikost $\lfloor n/k \rfloor$ nebo $\lceil n/k \rceil$.*

$$t_k(n) = \left|E(T_k(n))\right|$$

Tvrzení 3 (Turán)**.**

$$\mathrm{ex}(K_{k+1}, n) = t_k(n)$$

1.1 Příklady

Příklad 1. Nechť F je systém podmnožin množiny $\{1, n\}$, ve kterém se každé dvě podmnožiny protínají. Nalezněte optimální horní odhad na velikost F.

Příklad 2. Dokažte, že místo podmnožin velikosti k v Erdős-Ko-Rado můžeme uvažovat nezávislé podmnožiny velikosti maximálně k. Neboli dokažte následující:

Jestliže $n \geq 2k$, pak protínající se systém podmnožin $[n]$ velikosti maximálně k takových, že žádná není podmnožinou jiné, má velikost maximálně $\binom{n-1}{k-1}$.

Příklad 3. Nechť $V_1, \cdots, V_s$ jsou disjunktní $(k-1)$-prvkové množiny a nechť F je systém s-prvkových množin S_j, t.ž., $|S_j \cap V_i| = 1$ pro každé i, j. Kolik množin tvoří F? Ukažte, že F nemá slunečnici s k lístky.

Příklad 4. Nechť $\mathrm{ex}(H,n) = \max\{|E(G)| : |V(G)| = n, H \not\subseteq G\}$ je extremální počet hran pro graf n vrcholy neobsahující H jako podgraf.

Ukažte, že pro každý graf H a přirozená čísla $n_1 \le n_2$ platí

$$\frac{\mathrm{ex}(H,n_1)}{\binom{n_1}{2}} \ge \frac{\mathrm{ex}(H,n_2)}{\binom{n_2}{2}}.$$

(Hint: Pro graf G s n_2 vrcholy tž. $H \not\subseteq G$ počítejte dvěma způsoby počet dvojic (X,e), kde $X \subseteq V(G)$ je množina velikosti n_1 a $e \in E(G[X])$).

Vyvoďte, že limita $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ex}(H,n)}{\binom{n}{2}}$ vždy existuje.

Příklad 5. Ukažte, že jestliže G je graf s n vrcholy, $K_4 \not\subseteq G$ a v je vrchol G stupně 3, pak G má minor s $n-1$ vrcholy a alespoň $|E(G)| - 2$ hranami.

S pomocí tohoto tvrzení dokažte, že jestliže G je graf s $n \ge 4$ vrcholy a alespoň $2n-2$ hranami, pak $K_4 \preceq_m G$.