

Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 13

Jan Soukup

22.5.2024

<https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG2/>

1 (Exponenciální) vytvořující funkce

Definice 1.

Mocninná řada je řada tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ a x je reálná (nebo komplexní) proměnná.

Jako obyčejnou vytvořující funkci (ovf) posloupnosti (a_0, a_1, a_2, \dots) označíme mocninnou řadu $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$.

Jako exponenciální vytvořující funkci (evf) posloupnosti (a_0, a_1, a_2, \dots) označíme mocninnou řadu $A(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \dots$.

Definice 2. Poloměr konvergence R mocninné řady $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ je

$$R = \sup\{c > 0 : |a_n| \leq \left(\frac{1}{c}\right)^n \text{ až na konečně mnoho } n\}.$$

Lemma 1. Necht' $A(x)$ je mocninná řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, pak

- $A(x)$ diverguje pro $x : |x| > R$.
- $A(x)$ konverguje pro $x : |x| < R$.

Conjecture 1. Aplikování lemma a definice tedy vidíme, že $|a_n| \leq \left(\frac{1}{R-\varepsilon}\right)^n$.

Z komplexní analýzy vyplývá, že pokud máme vytvořující funkci $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ s kladnými koeficienty s poloměrem konvergence $0 < R < \infty$, tak v bodě $x = R$ bude $A(x)$ divergovat, což bude odpovídat singularitě jí reprezentující funkce v bodě $x = R$ (většinou tam ani nebude definována).

Poloměr konvergence tedy můžeme najít jako první kladné x , kde naše funkce přestane být definována.

Tvrzení 2 (pro informaci - z minulého semestru). Buď (a_0, a_1, \dots) posloupnost reálných čísel. Necht' existuje K takové, že $|a_n| \leq K^n$ pro všechna n . Potom pro každé $x \in \left(-\frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right)$ řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konverguje a hodnota jejího součtu definuje funkci $a(x)$ proměnné x na uvedeném intervalu. Hodnotami $a(x)$ na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy a_0, a_1, \dots jednoznačně určeny, $a(x)$ má v 0 derivace všech řádů a platí

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Lemma 3 (Operace s vytvořujícími funkcemi).

Obyčejné vytvořující funkce:

Operace	koeficient u x^n	Význam
Součet $A(x) + B(x)$	$a_n + b_n$	(disjunktní) sjednocení
Součin $A(x)B(x)$	$\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$	"disjunktí" dvojice
(*) $\frac{1}{1-A(x)}$	$\sum_{k \geq 0} [x^n] A^k(x)$	konečné posloupnosti

Exponenciální vytvořující funkce:

Operace	koeficient u $x^n/n!$	Význam
Součet $A(x) + B(x)$	$a_n + b_n$	(disjunktní) sjednocení
Součin $A(x)B(x)$	$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$	proložená dvojice
(*) $e^{A(x)}$	$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} [x^n] A^k(x)$	vytvoření z komponent

1.1 Příklady

Příklad 1.

- (1) Rozmyslete/Připomeňte si, že počet způsobu vybrání (nezáleží na pořadí) 3 písmen ze slova MAMMA je rovna koeficientu u x^3 v polynomu $(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2)$, neboli násobení ovf $(1, 1, 1, 1)$ a $(1, 1, 1)$.
- (2) Rozmyslete si, že počet způsobu uspořádání (záleží na pořadí) 3 písmen ze slova MAMMA je rovna koeficientu u $\frac{x^3}{3!}$ v polynomu $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!})(1 + x + \frac{x^2}{2})$, neboli násobení evf $(1, 1, 1, 1)$ a $(1, 1, 1)$.
- (3) Rozmyslete si, že to obdobně funguje i pro slova s více různými písmeny. Například máme 136 způsobů jak seřadit 3 písmena ze slova SEQUENCE.

Příklad 2 (problém šatnářky pomocí evf).

Definujme s_n jako počet permutací bez pevného bodu na množině $\{1, \dots, n\}$. Nechť $S(x)$ je evf této posloupnosti, tedy $S(x) = \sum_{n \geq 0} s_n \frac{x^n}{n!}$.

- (1) Dokažte, že $n! = \sum_k \binom{n}{k} s_{n-k}$.
- (2) Podívejte se na to jako na evf (vynásobte vhodným výrazem typu $c \cdot x^n$ a sečtěte pro všechna n) a dokažte $\frac{1}{1-x} = e^x S(x)$.
- (3) Vyjádřete s_n (hodí se vyjádřit $\frac{1}{1-x}$ a e^{-x} jako posloupnosti).

Příklad 3 (Počet stromů/lesů/koster K_n).

Nechť s_n je počet zakořeněných stromů na označených vrcholech $1, \dots, n$ (a uvažme, že $s_0 = 0$). Uvažme evf $S(x)$ posloupnosti (s_0, s_1, \dots) tedy $S(x) = \sum_{n \geq 0} s_n \frac{x^n}{n!}$.

- (1) Rozmyslete si jak vypadá a co vyjadřuje evf $S^2(x)$. Pro porovnání rozhodněte co by jsme dostali, kdyby jsme se na naši posloupnost dívali jako na ovf.
- (2) Zobecněte předchozí bod na vyšší mocniny a vyjádřete počet zakořeněných lesů jako nějakou evf $L(x)$ v závislosti na $S^k(x)$.
- (3) Označme jako l_n počet zakořeněných lesů na označených vrcholech. Dokažte $s_{n+1} = (n+1)l_n$.
- (4) Pomocí předchozích dvou bodů dokažte, že $S(x) = xe^{S(x)}$.
- (5) Podívejte se na inverzní funkci k $S(x)$ a pomocí ní najděte bod kde $S(x)$ přestává být definována a tedy i poloměr konvergence $S(x)$.
- (6) Pomocí lemma o poloměru konvergence dokažte, že $\forall \varepsilon > 0 : s_n = O((e + \varepsilon)^n n!)$.

Příklad 4. Nechť \mathcal{A} je množina řetězců z písmen **a**, **b** a **c** takových, že počet výskytů písmene **a** je sudý a písmeno **b** se vyskytuje nejvýše 4-krát, a a_n počet takových řetězců délky n . Najděte explicitní výraz pro exponenciální vytvořující funkci $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$. Poznámka:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$