Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 12

Jan Soukup

13.5.2024
`https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG2/`

1 Exponenciální vytvořující funkce a Burnsideovo lemma

Definice 1.

- Akce α *grupy* Γ *na množině* $\mathcal{A}$ *je funkce* $\Gamma \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *tž.*
  - $\alpha(\mathrm{id}, x) = x$
  - $\alpha(\pi_1 \circ \pi_2, x) = \alpha(\pi_1, \alpha(\pi_2, x))$.
- Orbita $[x]$ *prvku* $x \in \mathcal{A}$*:* $\{\alpha(\pi, x) : \pi \in \Gamma\}$
- $\mathcal{A}/\Gamma$*: množina všech orbit*
- $\mathrm{Fix}(\pi) = \{x \in \mathcal{A} : \alpha(\pi, x) = x\}$*: množina* pevných bodů π.
- $\mathrm{Stab}(x) = \{\pi \in \Gamma : \alpha(\pi, x) = x\}$*:* stabilizátor x.

Tvrzení 1 (Burnsideovo lemma)**.** Pro akci konečné grupy Γ na množině $\mathcal{A}$ platí

$$|\mathcal{A}/\Gamma| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} |\mathrm{Fix}(\pi)|$$

A pokud pro $o \in \mathcal{A}/\Gamma$ máme $||o|| \in \mathbb{N}_0$ a $||o|| = n$ jen pro konečně mnoho o tak,

$$\sum_{o \in \mathcal{A}/\Gamma} x^{||o||} = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} \sum_{p \in \mathrm{Fix}(\pi)} x^{||[p]||}.$$

1.1 Příklady

Příklad 1. Mějme akci α konečné grupy Γ na množině $\mathcal{A}$ a $x \in \mathcal{A}$. Pro $y \in \mathcal{A}$ Definujme $\mathrm{Zobr}(x, y) = \{\pi \in \Gamma : \alpha(\pi, x) = y\}$. Dokažte, že $\forall y \in [x]$ platí, že $|\mathrm{Zobr}(x, y)| = |\mathrm{Stab}(x)|$.

Příklad 2 (Lemma o orbitě a stabilizátoru)**.** Mějme akci α konečné grupy Γ na množině $\mathcal{A}$. Dokažte, že $\forall x \in \mathcal{A}$ platí, že $|[x]| \cdot |\mathrm{Stab}(x)| = |\Gamma|$.

Příklad 3. Spočtěte počet různých obarvení stěn krychle k barvami až na otočení.

Příklad 4. Určete počet neizomorfních grafů na 4 vrcholech pomocí Burnsideovo lemmatu.

Příklad 5. Spočítejte generující funkci pro počty rozkladů n na součet 5 přirozených čísel uspořádaných do cyklu, kdy rozklady lišící se otočením nebo zrcadlením se považují za stejné.

Příklad 6 (Počet stromů/lesů/koster K_n).
Nechť s_n je počet zakořeněných stromů na označených vrcholech $1, \dots, n$ (a uvažme, že $s_0 = 0$). Uvažme evf $S(x)$ posloupnosti $(s_0, s_1, \dots)$ tedy $S(x) = \sum_{n \geq 0} s_n \frac{x^n}{n!}$.

(1) Rozmyslete si jak vypadá a co vyjadřuje evf $S^2(x)$. Pro porovnání rozhodněte co by jsme dostali, kdyby jsme se na naší posloupnost dívali jako na ovf.

(2) Zobecněte předchozí bod na vyšší mocniny a vyjádřete počet zakořeněných lesů jako nějakou evf $L(x)$ v závislosti na $S^k(x)$.

(3) Označme jako l_n počet zakořeněných lesů na označených vrcholech. Dokažte $s_{n+1} = (n+1)l_n$. Pomocí toho odvoďte, že $L(x) = \frac{S(x)}{x}$.

(4) Pomocí předchozích dvou bodů dokažte, že $S(x) = xe^{S(x)}$.

(5) Podívejte se na inverzní funkci k $S(x)$ a pomocí ní najděte bod kde $S(x)$ přestává být definována a tedy i poloměr konvergence $S(x)$.

(6) Pomocí lemma o poloměru konvergence dokažte, že $\forall \varepsilon > 0 : \; s_n = O\left((e+\varepsilon)^n n!\right)$.