

Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 12.5

Jan Soukup

15.5.2024

<https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG2/>

1 Exponenciální vytvořující funkce a Burnsideovo lemma

Definice 1.

- Akce α grupy Γ na množině \mathcal{A} je funkce $\Gamma \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tž.
 - $\alpha(\text{id}, x) = x$
 - $\alpha(\pi_1 \circ \pi_2, x) = \alpha(\pi_1, \alpha(\pi_2, x))$.
- Orbita $[x]$ prvku $x \in \mathcal{A}$: $\{\alpha(\pi, x) : \pi \in \Gamma\}$
- \mathcal{A}/Γ : množina všech orbit
- $\text{Fix}(\pi) = \{x \in \mathcal{A} : \alpha(\pi, x) = x\}$: množina pevných bodů π .
- $\text{Stab}(x) = \{\pi \in \Gamma : \alpha(\pi, x) = x\}$: stabilizátor x .

Tvrzení 1 (Burnsideovo lemma). Pro akci konečné grupy Γ na množině \mathcal{A} platí

$$|\mathcal{A}/\Gamma| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} |\text{Fix}(\pi)|$$

A pokud pro $o \in \mathcal{A}/\Gamma$ máme $\|o\| \in \mathbb{N}_0$ a $\|o\| = n$ jen pro konečně mnoho o tak,

$$\sum_{o \in \mathcal{A}/\Gamma} x^{\|o\|} = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} \sum_{p \in \text{Fix}(\pi)} x^{\|p\|}.$$

1.1 Příklady

Příklad 1. Mějme akci α konečné grupy Γ na množině \mathcal{A} a $x \in \mathcal{A}$. Pro $y \in \mathcal{A}$ Definujme $\text{Zobr}(x, y) = \{\pi \in \Gamma : \alpha(\pi, x) = y\}$. Dokažte, že $\forall y \in [x]$ platí, že $|\text{Zobr}(x, y)| = |\text{Stab}(x)|$.

Příklad 2 (Lemma o orbitě a stabilizátoru). Mějme akci α konečné grupy Γ na množině \mathcal{A} . Dokažte, že $\forall x \in \mathcal{A}$ platí, že $\|[x]\| \cdot |\text{Stab}(x)| = |\Gamma|$.

Příklad 3. Spočítejte počet různých obarvení stěn krychle k barvami až na otočení.

Příklad 4. Určete počet neizomorfních grafů na 4 vrcholech pomocí Burnsideovo lemmatu.

Příklad 5. Spočítejte generující funkci pro počty rozkladů n na součet 5 přirozených čísel uspořádaných do cyklu, kdy rozklady lišící se otočením nebo zrcadlením se považují za stejné.