Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 11

Jan Soukup

6.5.2024
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG2/

1 (Exponenciální) vytvořující funkce

Definice 1.
Mocninná řada *je řada tvaru* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$*, kde* $a_i \in \mathbb{R}$ *a* x *je reálná (nebo komplexní) proměnná.*

Jako obyčejnou vytvořující funkci (ovf) *posloupnosti* $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ *označíme mocninnou řadu* $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$.

Jako exponenciální vytvořující funkci (evf) *posloupnosti* $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ *označíme mocninnou řadu* $A(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots$.

Definice 2. *Poloměr konvergence* R *mocninné řady* $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ *je*

$$R = \sup\{c > 0 : \ |a_n| \leq \left(\frac{1}{c}\right)^n \text{ až na konečně mnoho } n\}.$$

Lemma 1. Nechť $A(x)$ je mocninná řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, pak

- $A(x)$ diverguje pro $x : \ |x| > R$.
- $A(x)$ konverguje pro $x : \ |x| < R$.

Conjecture 1. *Aplikování lemma a definice tedy vidíme, že* $|a_n| \leq \left(\frac{1}{R-\varepsilon}\right)^n$.

Z komplexní analýzy vyplývá, že pokud máme vytvořující funkci $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ s kladnými koeficienty s poloměrem konvergence $0 < R < \infty$, tak v bodě $x = R$ bude $A(x)$ divergovat, což bude odpovídat singularitě jí reprezentující funkce v bodě $x = R$ (většinou tam ani nebude definována).

Poloměr konvergence tedy můžeme najít jako první kladné x, kde naše funkce přestane být definována.

Tvrzení 2 (pro informaci - z minulého semestru)**.** Buď $(a_0, a_1, \ldots)$ posloupnost reálných čísel. Nechť existuje K takové, že $|a_n| \leq K^n$ pro všechna n. Potom pro každé $x \in (\frac{-1}{K}, \frac{1}{K})$ řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konverguje a hodnota jejího součtu definuje funkci $a(x)$ proměnné x na uvedeném intervalu. Hodnotami $a(x)$ na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy $a_0, a_1, \ldots$ jednoznačně určeny, $a(x)$ má v 0 derivace všech řádů a platí

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Lemma 3 (Operace s vytvořujícími funkcemi)**.**
Obyčejné vytvořující funkce:

Operace	koeficient u x^n	Význam
Součet $A(x) + B(x)$	$a_n + b_n$	(disjukntní) sjednocení
Součin $A(x)B(x)$	$\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$	"disjuntní"dvojice
(*) $\frac{1}{1-A(x)}$	$\sum_{k\geq 0} [x^n] A^k(x)$	konečné posloupnosti

Exponenciální vytvořující funkce:

Operace	koeficient u $x^n/n!$	Význam
Součet $A(x)+B(x)$	a_n+b_n	(disjuknthí) sjednocení
Součin $A(x)B(x)$	$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_ib_{n-i}$	proložená dvojice
(*) $e^{A(x)}$	$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}[x^n]A^k(x)$	vytvoření z komponent

1.1 Příklady

Příklad 1.

(1) Rozmyslete/Připomeňte si, že počet způsobu vybrání (nezáleží na pořadí) 3 písmen ze slova MAMMA je rovna koeficientu u x^3 v polynomu $(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)$, neboli násobení ovf $(1,1,1,1)$ a $(1,1,1)$.

(2) Rozmyslete si, že počet způsobu uspořádání (záleží na pořadí) 3 písmen ze slova MAMMA je rovna koeficientu u $\frac{x^3}{3!}$ v polynomu $(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+x+\frac{x^2}{2})$, neboli násobení evf $(1,1,1,1)$ a $(1,1,1)$.

(3) Rozmyslete si, že to obdobně funguje i pro slova s více různými písmeny. Například máme 136 způsobů jak seřadit 3 písmena ze slova SEQUENCE.

Příklad 2 (problém šatnářky pomocí evf)**.**

Definujme s_n jako počet permutací bez pevného bodu na množině $\{1,\dots,n\}$. Nechť $S(x)$ je evf této posloupnosti, tedy $S(x)=\sum_{n\geq 0}s_n\frac{x^n}{n!}$.

(1) Dokažte, že $n!=\sum_k\binom{n}{k}s_{n-k}$.

(2) Podívejte se na to jako na evf (vynásobte vhodným výrazem typu $c\cdot x^n$ a sečtěte pro všechna n) a dokažte $\frac{1}{1-x}=e^xS(x)$.

(3) Vyjádřete s_n (hodí se vyjádřit $\frac{1}{1-x}$ a e^{-x} jako posloupnosti).

Příklad 3 (Počet stromů/lesů/koster K_n)**.**
Nechť s_n je počet zakořeněných stromů na označených vrcholech $1,\dots,n$ (a uvažme, že $s_0=0$). Uvažme evf $S(x)$ posloupnosti $(s_0,s_1,\dots)$ tedy $S(x)=\sum_{n\geq 0}s_n\frac{x^n}{n!}$.

(1) Rozmyslete si jak vypadá a co vyjadřuje evf $S^2(x)$. Pro porovnání rozhodněte co by jsme dostali, kdyby jsme se na naší posloupnost dívali jako na ovf.

(2) Zobecněte předchozí bod na vyšší mocniny a vyjádřete počet zakořeněných lesů jako nějakou evf $L(x)$ v závislosti na $S^k(x)$.

(3) Označme jako l_n počet zakořeněných lesů na označených vrcholech. Dokažte $s_{n+1}=(n+1)l_n$.

(4) Pomocí předchozích dvou bodů dokažte, že $S(x)=xe^{S(x)}$.

(5) Podívejte se na inverzní funkci k $S(x)$ a pomocí ní najděte bod kde $S(x)$ přestává být definována a tedy i poloměr konvergence $S(x)$.

(6) Pomocí lemma o poloměru konvergence dokažte, že $\forall\varepsilon>0:\ s_n=O\left((e+\varepsilon)^n n!\right)$.

Příklad 4. Nechť $\mathcal{A}$ je množina řetězců z písmen `a`, `b` a `c` takových, že počet výskytů písmene `a` je sudý a písmeno `b` se vyskytuje nejvýše 4-krát, a a_n počet takových řetězců délky n. Najděte explicitní výraz pro exponenciální vytvořující funkci $A(x)=\sum_{n\geq 0}a_n\frac{x^n}{n!}$. Jinak řečeno dopočtěte a_n. Poznámka:

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots.$$