Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 10

Jan Soukup

29.4.2024

`https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG2/`

1 Vytvořující funkce

Vytvořující (generující) funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$.

Operace	koeficient u x^n	Význam
Součet $A(x) + B(x)$	$a_n + b_n$	(disjuknutní) sjednocení
Součin $A(x)B(x)$	$\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$	všechny dvojice aby celkový počet objektů ve dvojici byl n
$A'(x)$	$(n+1)a_{n+1}$	
$\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t$	$\frac{a_{n-1}}{n}$	

Tvrzení 1 (Zobecněná binomická věta)**.** Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots,$$

kde $\binom{r}{0} = 1$ a $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$ pro $k \in \mathbb{N}$.

Jako důsledek víme, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{n-1} x^i.$$

Příklad 1. V následujících příkladech vždy sestrojte příslušnou mocninou řadu, nemusíte dopočítávat výsledný koeficient

(a) Kolik existuje celočíselných řešení rovnice $x + y = 7$ pro $0 \leq x, y \leq 4$?

(b) Vracíme se z nákupu s pěti jednokilovými položkami a třemi dvoukilovými. Máme s sebou tašku, která unese maximálně sedm kilogramů. Kolika způsoby můžeme maximálně naplnit tašku?

(c) V cukrárně prodávají tři druhy zákusků – větrníky, kremrole a punčové dortíky. Kolika způsoby lze koupit 12 zákusků tak, aby se od každého druhu koupily alespoň dva zákusky a přitom nejvýš tři kremrole?

Příklad 2. Uvažme náhodnou procházku v $\mathbb{Z}$ začínající v počátku, kde se v každém kroku $n = 1, 2, \dots$ rozhodneme náhodně uniformně nezávisle, zda budeme pokračovat doleva či doprava.

(a) Pro $n \in \mathbb{N}$ si připomeňte, že pravděpodobnost u_{2n} jevu, že se po $2n$ krocích se vrátíme do počátku je $\binom{2m}{m}/2^{2m}$.

(b) Určete vytvořující funkci $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} x^n$. Může se hodit (dokažte podobně jako na přednášce v zimním semestru), že
$$\binom{-1/2}{n}(-1)^n = 2^{-2n}\binom{2n}{n}.$$

(c) Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ je f_{2n} pravděpodobnost jevu, že se po $2n$ krocích se vrátíme *poprvé* do počátku. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $f_0 = 0$ a $u_0 = 1$ platí
$$u_{2n} = f_0 u_{2n} + f_2 u_{2n-2} + \cdots + f_{2n} u_0.$$

(d) Za použití výsledků z předešlých částí určete vytvořující funkci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} x^n$ a její koeficienty f_{2n} (a tedy i pravděpodobnosti, že se poprvé vrátíme do počátku po $2n$ krocích). Může se hodit podívat na součin $u(x)f(x)$. Pro počítání koeficientů si můžete všimnout, že $f'(x) = \frac{1}{2}u(x)$.

(e) Ukažte, že suma $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}$ konverguje. Bez důkazu můžete předpokládat, že z toho vyplývá, že $f(x)$ je zleva spojitá v 1 (vyplývá to z matematické analýzy z Abelovy věty). Za použití tohoto faktu ukažte, že pravděpodobnost návratu do počátku se rovná jedné.

Příklad 3. Dokážete nalézt dvě nestandardní šestistěnné hrací kostky B a C s přirozenými čísly takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pravděpodobnost, že na B a C padne dohromady přesně n, stejná jako pravděpodobnost, že n padne jako součet dvou standardních šestistěnných hracích kostkek?

2 Tutteův polynom

Definice 1. Tutteův polynom *grafu* $G = (V, E)$ *je*
$$T_G(x, y) = \sum_{F \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(F)} \cdot (y-1)^{n(F)}.$$

Tvrzení 2.
$$T_G = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } E(G) = \emptyset \\ xT_{G-e} = xT_{G/e} & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je most} \\ yT_{G-e} = yT_{G/e} & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je smyčka} \\ T_{G-e} + T_{G/e} & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ není most ani smyčka} \end{cases}$$

Definice 2. Chromatický polynom $\chi_G(b) =$ *počet obarvení G pomocí barev* $\{1, \ldots, b\}$.

2.1 Příklady

Příklad 4 (z minula)**.** Dokažte (z definice, bez použití vztahu k Tutteho polynomu), že
$$\chi_G(b) = \begin{cases} b^{|V(G)|} & \text{jestliže } E(G) = \emptyset \\ (b-1)\chi_{G/e}(b) & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je most} \\ 0 & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je smyčka} \\ \chi_{G-e}(b) - \chi_{G/e}(b) & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ není most ani smyčka} \end{cases}$$

Příklad 5 (z minula)**.** S použitím předchozího cvičení dokažte vztah
$$\chi_G(b) = (-1)^{r(G)} b^{k(G)} T_G(1-b, 0)$$
indukcí podle počtu hran grafu G.