

Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 1

Jan Soukup

19.2.2024

<https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG2/>

1 Edmondsův kytičkový algoritmus

Lemma 1 (Lemma VSC (o volné střídávě cestě)). Mějme graf G a v něm párování M . Pak G obsahuje volnou střídávou cestu (VSC) vůči M právě tehdy, když M není největší.

Lemma 2 (Lemma KK (o kontrakci květu)). Mějme graf G a v něm párování M . Nechť je v G kytko, kterou tvoří stonek S a květ C . Pak G obsahuje volnou střídávou cestu (VSC) vůči M právě tehdy, když G/C (G se zkontrahovaným květem C) obsahuje VSC.

Příklad 1 (Kompletace Edmondsova algoritmu). Na přednášce jsme si ukazovali algoritmus NAJDIVSC-NEBOKYTKU(G, M), která v G najde volnou střídávou cestu (VSC) nebo kytku vůči párování M anebo korektně ohlásí, že M je největší párování v M .

- (1) Popište celý algoritmus, který najde největší párování v M za pomoci procedury NAJDIVSCNEBOKYTKU.
- (2) Určete časovou složitost vzhledem k počtu vrcholů n a počtu hran m .
- (3*) Zkuste najít příklad, na němž je analýza časové složitosti těsná (odhad na počet iterací nebo počet rekurzivních volání nelze zlepšit).

(Algoritmus lze zrychlit pomocí chytrých datových struktur, ale to není třeba rozmýšlet)

Příklad 2 (Lemma KK (o kontrakci květu)). K úplnosti analýzy Edmondsova algoritmu nám už chybí dokázat jen Lemma KK.

- (1) Nechť M je párování v G a $M \setminus C$ je párování v G/C . Ukažte, že pokud $M \setminus C$ není největší v G/C , pak ani M není největší v G . (Můžete nebo nemusíte k tomu využít Lemma 1).
- (2) Dokažte opačnou implikaci za předpokladu, že vrchol v_0 (tedy vrchol v průniku květu a stonku) je *volný* (to nastane, právě když má stonek délku 0). (Tady už se Lemma 1 hodí využít).
- (3) Jak se tohoto předpokladu elegantně zbavit?
- (4) Nechť máme VSC P' v zkontrahovaném grafu G/C vůči $M \setminus C$. Jak z ní efektivně zkonstruovat VSC P v G vůči M ? (Možná už jste to vyřešili v prvním bodě.)

Příklad 3. Dokažte, že strom T má perfektní párování právě tehdy, když pro každý jeho vrchol v má $T - v$ právě jednu lichou komponentu.