

Kombinatorika a Grafy 1 - Úkol 5

Jan Soukup

Odevzdat do začátku cvičení 3.1.-8.1.2024

Příklad 1 (10b). Na univerzitu chodí 1600 studentů a vyučuje se 16000 předmětů. Na každý předmět chodí 80 studentů. Dokažte, že existují dva předměty takové, že na oba chodí 4 stejní studenti.

Hint1: Může se hodit počítat dvěma způsoby počet dvojic $(s, 2P)$, kde s je student a $2P$ je dvojice předmětů, které student s navštěvuje.

Hint2: Může se hodit Jensenova nerovnost, konkrétně ve tvaru

$$n \cdot \binom{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}}{2} \leq \sum_{i=1}^n \binom{x_i}{2}$$

Příklad 2 (10b). Nechť $r \geq 2$. Dokažte, že když obarvíme všechna reálná čísla r barvami, tak existují ne nutně různá jednobarevná čísla $x, y, z, w \in \mathbb{R}^+$, taková, že $x + y + z = w$.