Kombinatorika a Grafy 1 - Cvičení 9

Jan Soukup

27.11.-29.11.2023
`https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG/`

1 Systém různých reprezentantů a Hallova věta

Nechť X a I jsou konečné množiny. *Množinovým systémem na* X nazveme $|I|$-tici $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$ (dvojice $(X, \mathcal{M})$ se také nazývá hypergraf). *Systém různých reprezentantů* (SRR) je prostá funkce $f : I \to X$ taková, že pro každé $i \in I$ je $f(i) \in M_i$. Víme, že existence SRR v $\mathcal{M}$ je ekvivalentní s existencí párování velikosti $|I|$ v *incidenčním grafu* $G_{\mathcal{M}} = (I \cup X, \{\{i, x\} : i \in I, x \in X, x \in M_i\})$.

Tvrzení 1 (Hallova věta)**.** Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje právě tehdy, když pro každou $J \subseteq I$ je $\left|\bigcup_{j\in J} M_j\right| \geq |J|$; tato podmínka se nazývá Hallova.

2 Vrcholová a hranová souvislost

Nechť $G = (V, E)$ je graf. G je souvislý, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. *Hranový řez* G je množina $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez* G je množina $C \subseteq V$ taková, že graf $G - C$ je nesouvislý.

Hranová souvislost G (značíme $k_e(G)$) je velikost nejmenšího hranového řezu G. *Vrcholová souvislost* G ($k_v(G)$) je $k-1$, pokud $G = K_k$ a $k > 1$, 1 pokud $G = K_1$, a velikost nejmenšího vrcholového řezu G jinak. Graf je vrcholově (resp. hranově) k-souvislý, pokud $k_v(G) \geq k$ resp. $k_e(G) \geq k$.

Na přednášce jste si dokázali/dokážete si, že $k_e(G)-1 \leq k_e(G-e) \leq k_e(G)$ a $k_v(G)-1 \leq k_v(G-e) \leq k_v(G)$.

Dále víme:

Tvrzení 2 (Fordova–Fulkersonova věta)**.** $k_e(G) \geq t$ právě když mezi každými dvěma vrcholy existuje alespoň t hranově disjunktních cest.

Tvrzení 3 (Mengerova věta)**.** Pokud $G \neq K_1$ tak $k_v(G) \geq t$ právě když mezi každými dvěma vrcholy existuje alespoň t vrcholově disjunktních cest (koncově body jsou společné).

3 Příklady

Příklad 1. Nechť a, b, c, d, e jsou různá přirozená čísla.

(a) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami množiny $\{a, b, c, d\}$ systém různých reprezentantů?

(b) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami množiny $\{a, b, c, d, e\}$ systém různých reprezentantů?

Příklad 2. Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.

Příklad 3 ($\frac{1}{2}$*)**.** Santa má aspoň n dárků pro n dětí. Pro každé i existuje číslo $x_i \in \mathbb{N}$ a podmnožina dárků velikosti x_i taková, že i-té dítě bude nadšené pokud dostane dárek z této podmnožiny. Navíc,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Dokažte, Santa může každému dítěti dát jeden dárek, tak aby všechny děti byli nadšené.

Příklad 4. Najděte příklad grafu G, ve kterém lze odebrat vrchol tak, že

- hranová souvislost G klesne (vzroste) o libovolně velké předem dané číslo.
- vrcholová souvislost G vzroste o libovolně velké předem dané číslo. O kolik může vrcholová souvislost klesnout po odebrání vrcholu?

Příklad 5. Pro libovolnou dvojici přirozených $l \leq k$ nalezněte graf G, pro který je $k_e(G) = k$ a $k_v(G) = l$. Neboli, takový graf, jehož hranová souvislost je k a jehož vrcholová souvislost je l.

Příklad 6. Nechť $G = (V, E)$ je vrcholově k- souvislý. Dokažte, že přidáním nového vrcholu stupně alespoň k dostaneme zase vrcholově k-souvislý graf.

Příklad 7. Nechť $G = (V, E)$ je vrcholově k- souvislý. Dokažte, že pro každý vrchol $x \in V$ a každou množinu $A \subseteq V$ takovou, že $|A| = k$ a $x \notin A$ existuje k cest z x do vrcholů A takových, že každé dvě z nich sdílejí pouze x.

Příklad 8. Ukažte, že pro každé $k \geq 2$ je každý k-regulární souvislý bipartitiní graf vrcholově 2-souvislý. Platí to i když pokud graf nebude bipartitní?

Příklad 9 (* z minula)**.** Dokažte, že Hallova věta implikuje Kőnigovu–Egerváryho větu (tedy, že velikost největšího párování se v bipartitním grafu rovná velikosti nejmenšího vrcholového pokrytí).