Kombinatorika a Grafy 1 - Cvičení 8

Jan Soukup

20.11.-22.11.2023
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG/

1 Toky v sítích

Síť je uspořádaná čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, neboli $E \subseteq V \times V$, z a s jsou dva různé vrcholy grafu G (zvané *zdroj* a *stok*) a *kapacita* $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. *Tok v síti* je každá funkce $f\colon E \to \mathbb{R}$ splňující $0 \le f(e) \le c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a splňující

$$\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$$

pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. *Velikost toku* je

$$w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v,z).$$

Řezem nazveme podmnožinu E, po jejímž odstranění neexistuje orientovaná cesta ze zdroje do stoku. *Kapacita řezu* R je $c(R) = \sum_{e\in R} c(e)$.

Jako *rezervu hrany* e na nějaké cestě P ze z do s označíme $r(e) = c(e) - f(e)$ pro hranu e orientovanou po směru P a $r(e) = f(e)$ pro hranu orientovanou proti směru P. Cesta P je pak *zlepšující*, pokud všechny její hrany mají kladnou rezervu.

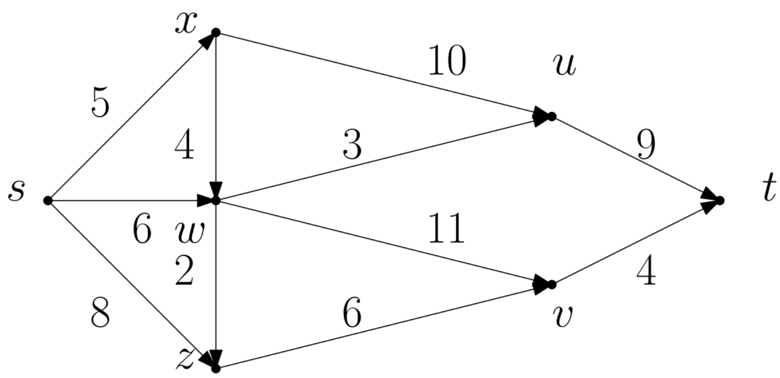
Algorithm 1.1: Ford–Fulkerson(G)

$f \leftarrow$ *nulový tok*
while existuje zlepšující cesta P ze z do s
do $\begin{cases} \epsilon_P \leftarrow \min_{e\in E(P)} r(e) \\ \text{Zvětšíme tok } f \text{ podél } P \text{ o } \epsilon_P \text{ (každé hraně } e \text{ po směru zvětšíme} \\ f(e) \text{ a hranám proti směru zmenšíme } f(e)). \end{cases}$
Vrať tok f.

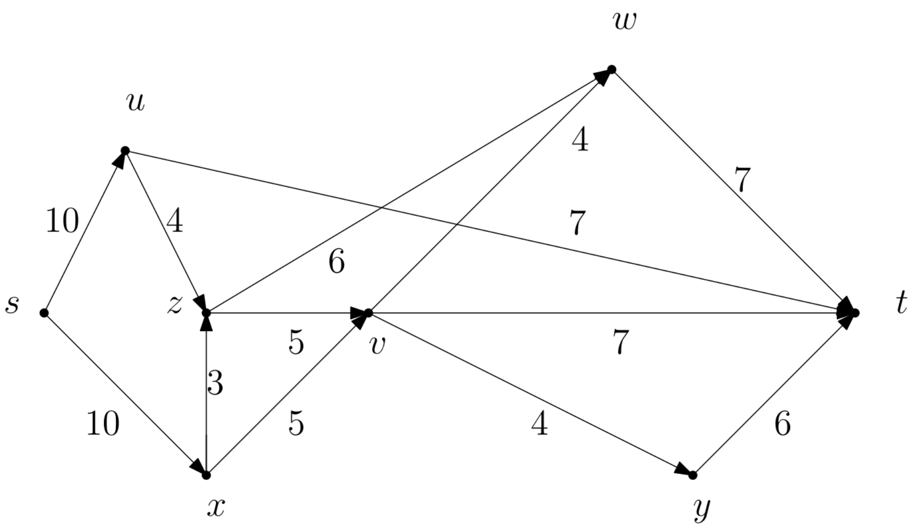
Tvrzení 1 (Hallova věta)**.** V bipartitním grafu $(A \cup B, E)$ existuje párování velikosti $|A|$ právě, když pro každou $J \subseteq A$ je $\left|\bigcup_{j\in J} \mathrm{N}(j)\right| \ge |J|$; tato podmínka se nazývá Hallova.

Příklad 1. Najděte tok maximální velikosti v následujících sítích (Fordovým–Fulkersonovým algoritmem nebo uhádněte) ze zdroje s do stoku t. Nalezněte také řezy minimální kapacity a ověřte tak, že dané toky mají skutečně maximální velikost.

(1)



(2)



Příklad 2.

(a) Najděte síť (a posloupnost konkrétních použitých zlepšujících cest), na které F.-F. algoritmus nemusí nedospět ke správnému výsledku, pokud mu povolíme používat jen orientované zlepšující cesty.

Příklad 3. Ukažte, že problém hledání maximálního toku v síti, která má více zdrojů a více stoků, lze redukovat na případ s jedním zdrojem a jedním stokem.

Příklad 4. Ukažte, že každý k-regulární (všechny vrcholy mají stupeň k) bipartitní graf má perfektní párování.

Pak dokažte, že dokonce existuje k takovýchto perfektních párování, které jsou po dvou disjunktní (žádné dvě párování z těch k neobsahuje společnou hranu).

Příklad 5. Na zkoušku přijde 100 studentů a 25 zkoušejících. Každý student má oblíbených aspoň 10 z přítomných zkoušejících. Každý student má být zkoušen právě jedním zkoušejícím.

Dokažte, že existuje rozvrh zkoušení, kde každý student bude zkoušen jedním ze svých oblíbených zkoušejících a každý zkoušející bude zkoušet maximálně 10 studentů.

Příklad 6 (*). Dokažte, že Hallova věta implikuje Kőnigovu–Egerváryho větu (tedy, že velikost největšího párování se v bipartitním grafu rovná velikosti nejmenšího vrcholového pokrytí. Na přednášce byla opačná implikace).