Kombinatorika a Grafy 1 - Cvičení 6

Jan Soukup

6.11.-8.11.2023
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG/

1 Projektivní roviny

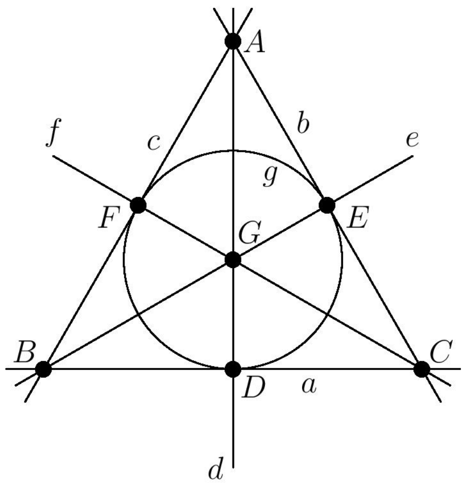
Definice 1. *Nechť X je konečná množina a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$. Potom dvojici $(X, \mathcal{P})$ nazveme konečnou projektivní rovinou, pokud splňuje následující axiomy:*

(A1) $\forall\, x, y \in X, x \neq y\ \exists!\ P \in \mathcal{P} : x, y \in P$ *(každými dvěma body prochází právě jedna přímka).*

(A2) $\forall\, P, Q \in \mathcal{P}, P \neq Q : |P \cap Q| = 1$ *(každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).*

(A3) $\exists\, C \subseteq X, |C| = 4\ \forall\, P \in \mathcal{P} : |C \cap P| \leq 2$ *(existují 4 body v obecné poloze).*

Příkladem konečné projektivní roviny řádu 2 je *Fanova rovina*:



Příklad 1. Dokažte, že pokud v definici nahradíme axiom (A3) následujícím axiomem (A3'), tak dostaneme ekvivalentní definici konečné projektivní roviny:

(A3') Existují aspoň 2 různé přímky $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, z nichž každá má aspoň 3 body.

Příklad 2. Dokažte, že pokud v definici nahradíme axiom (A3) následujícím axiomem (A3"), tak dostaneme ekvivalentní definici konečné projektivní roviny:

(A3") Neexistují dvě přímky které by dohromady pokrývali všechny body.

Příklad 3. Ve hře Dobble je 55 karet, přičemž na každé kartě je 8 symbolů a každé dvě karty mají právě jeden symbol společný.

V návodu se dočtete, že ve hře najdete přes 50 různých symbolů. Dokažte, že jich musí být ještě o trochu více.

Příklad 4. V Transylvánské loterii se náhodně losují tři různá čísla z čísel 1 až 14. Hráč si před slosováním nakoupí herní lístky, každé se třemi (různými) čísly. Vyhraje, pokud jsou mezi vylosovanými čísly aspoň dvě jím vybraná čísla na jednom z jeho herních lístků. Kolik lístků si stačí koupit, abyste měli zaručenou výhru?

Příklad 5. Ukažte, že existuje graf s N vrcholy a s aspoň $\Omega(N^{3/2})$ hranami, který neobsahuje $K_{2,2}$ jako podgraf.