Kombinatorika a Grafy 1 - Cvičení 5

Jan Soukup

30.10.-1.11.2023
`https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG/`

1 Vytvořující funkce

Víme, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{n-1} x^i.$$

Příklad 1 (Přeskočte, pokud jste si jistí, že to umíte spočítat)**.** Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 1$ a $a_{n+1} = 2a_n + 1$ pro $n \geq 0$.

Příklad 2. Pro dané přirozené k sestrojte vytvořující funkci $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde a_n je rovno pravděpodobnosti, že při hodu k klasickými šestistěnnými kostkami padne v součtu n. Pomocí toho spočtěte jaká je pravděpodobnost, že při hodu 12 kostkami padne přesně 30.

Příklad 3. Dokážete nalézt dvě nestandardní šestistěnné hrací kostky B a C s přirozenými čísly takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pravděpodobnost, že na B a C padne dohromady přesně n, stejná jako pravděpodobnost, že n padne jako součet dvou standardních šestistěnných hracích kostkek?

Příklad 4. Kolika způsoby je možné vydláždit obdélník o rozměrech $n \times 2$ pomocí dlaždic 1×2? A co obdélník o rozměrech $n \times 3$? Vždy najděte vhodnou rekurenci a dopočtěte výsledek, nebo alespoň vytvořující funkci k výsledné posloupnosti.

2 Projektivní roviny

Definice 1. *Nechť X je konečná množina a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$. Potom dvojici $(X, \mathcal{P})$ nazveme* konečnou projektivní rovinou*, pokud splňuje následující axiomy:*

(A1) $\forall\, x, y \in X, x \neq y\ \exists!\ P \in \mathcal{P} : x, y \in P$ *(každými dvěma body prochází právě jedna přímka).*

(A2) $\forall\, P, Q \in \mathcal{P}, P \neq Q : |P \cap Q| = 1$ *(každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).*

(A3) $\exists\, C \subseteq X, |C| = 4\ \forall\, P \in \mathcal{P} : |C \cap P| \leq 2$ *(existují 4 body v obecné poloze).*

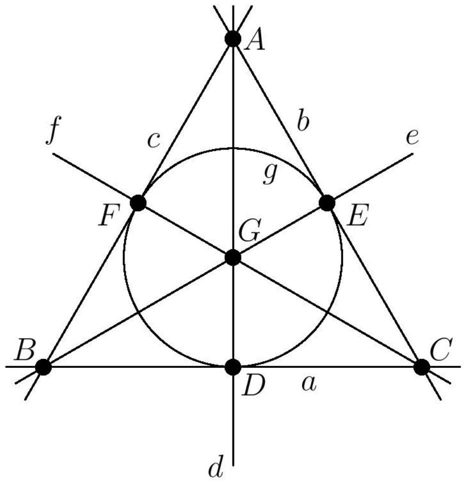
Příkladem konečné projektivní roviny řádu 2 je *Fanova rovina*:

Příklad 5. Dokažte, že pokud v definici nahradíme axiom (A3) následujícím axiomem (A3'), tak dostaneme ekvivalentní definici konečné projektivní roviny:

(A3') Existují aspoň 2 různé přímky $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, z nichž každá má aspoň 3 body.

Příklad 6. Dokažte, že pokud v definici nahradíme axiom (A3) následujícím axiomem (A3"), tak dostaneme ekvivalentní definici konečné projektivní roviny:

(A3") Neexistují dvě přímky které by dohromady pokrývali všechny body..


A
f
c
b
e
g
F
E
G
B
C
D
a
d