Kombinatorika a Grafy 1 - Cvičení 4

Jan Soukup

23-25.10.2023
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG/

1 Vytvořující funkce

Tvrzení 1 (Zobecněná binomická věta)**.** Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots ,$$

kde $\binom{r}{0} = 1$ a $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$ pro $k \in \mathbb{N}$.

Jako důsledek víme, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{n-1} x^i.$$

Tvrzení 2 (Rozklad na parciální zlomky)**.** Uvažujme podíl polynomů $\frac{p(x)}{q(x)}$, kde búno (jinak to můžeme snadno částečně vydělit) q má vyšší stupeň než p a má rozklad

$$q(x) = (x-a_1)^{n_1} \dots (x-a_N)^{n_N} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{m_1} \dots (x^2 + \alpha_M x + \beta_M)^{m_M}.$$

Pak můžeme zmíněný podíl rozložit na součet tzv. *parciálních zlomků*, kde za každý člen $(x-a_i)^{n_i}$ v rozkladu q budou členy $\frac{A_{i,1}}{x-a_i} + \ldots + \frac{A_{i,n_i}}{(x-a_i)^{n_i}}$ a za každý člen $(x^2+\alpha_i x+\beta_i)^{m_i}$ budou členy $\frac{B_{i,1}x+C_{i,1}}{x^2+\alpha_i x+\beta_i} + \ldots + \frac{B_{i,m_i}x+C_{i,m_i}}{(x^2+\alpha_i x+\beta_i)^{m_i}}$. Koeficienty A, B, C se dají jednoznačně určit pomocí řešení systému lineárních rovnic, který vyplývá z rozkladu.

Příklad 1. Určete koeficient

(a) u x^4 v $\frac{1}{x^2-5x+6}$

(b) u x^n v $\frac{1+3x}{(1-3x)^2}$.

(c) u x^{28} ve výrazu $(x + x^3 + x^5 + \cdots)^6$,

(d) u x^{10} v $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$

Příklad 2 (z minula, dořešené v předchozím příkladě)**.** Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 9$ a $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ pro $n \geq 0$.

Příklad 3 (z minula)**.** Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ a $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ pro $n \geq 0$.

Příklad 4 (z minula)**.** Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $c_0 = 1$ a $c_{n+1} = 7c_n + 6^{n+1}$ pro $n \geq 0$.

Příklad 5. Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 4$, $a_1 = 3$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + 3 \cdot 2^n$ pro $n \geq 0$.

Příklad 6. Pro dané přirozené k sestrojte vytvořující funkci $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde a_n je rovno pravděpodobnosti, že při hodu k klasickými šestistěnnými kostkami padne v součtu n. Pomocí toho spočtěte jaká je pravděpodobnost, že při hodu 12 kostkami padne přesně 30.

Příklad 7. Dokážete nalézt dvě nestandardní šestistěnné hrací kostky B a C s přirozenými čísly takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pravděpodobnost, že na B a C padne dohromady přesně n, stejná jako pravděpodobnost, že n padne jako součet dvou standardních šestistěnných hracích kostkek?

Příklad 8. Určete koeficient u x^n ve výrazu $\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$. Vyjádřete ho v jednoduchém tvaru bez použití zobecněných binomických koeficientů. (Tedy použijte postup podobný odvození důsledku zobecněné binomické věty z přednášky)

Základní operace s mocninnými řadami:		
operace	výsledek	n-tý člen
$a(x) + b(x)$	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$	$a_n + b_n$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \ldots)$	αa_n
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots, \alpha^i a_i, \ldots)$	$\alpha^n a_n$
$x^k a(x)$	$(0, \ldots, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$ (k nul na začátku)	a_{n-k}
$a(x^k)$	$(a_0, 0, \ldots, 0, a_1, 0, \ldots)$ (střídavě $k-1$ nul)	$a_{\frac{n}{k}}$ nebo 0
$\frac{a(x) - a_0 - \cdots - a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}$	$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$	a_{n+k}
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, ia_i, \ldots)$	$(n+1)a_{n+1}$
$\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_i}{i+1}, \ldots)$	$\frac{a_{n-1}}{n}$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \ldots)$, kde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$	$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$