Kombonatorika a Grafy 1 - Cvičení 3

Jan Soukup

16-18.10.2023
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG/

1 Vytvořující funkce

Mocninná řada je řada tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ a x je reálná proměnná. Jako *(obyčejnou) vytvořující funkci* posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ označíme součet mocninné řady $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je podle vzorce pro součet geometrické řady vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$ a podle binomické věty je $(1 + x)^n$ vytvořující funkcí posloupnosti $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n})$.

Přechod mezi posloupnostmi a funkcemi bude klíčový v kombinatorických aplikacích.

Tvrzení 1. Buď $(a_0, a_1, \ldots)$ posloupnost reálných čísel. Nechť existuje K takové, že $|a_n| \leq K^n$ pro všechna n. Potom

(a) Pro každé řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ stejnoměrně absolutně konverguje na intervalu $(\frac{-1}{K}, \frac{1}{K})$ a hodnota jejího součtu definuje funkci $a(x)$ proměnné x na uvedeném intervalu.

(b) Navíc derivace a neurčitý intergrál se dají počítat "člen po členu".

(c) Hodnotami $a(x)$ na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy $a_0, a_1, \ldots$ jednoznačně určeny, $a(x)$ má v 0 derivace všech řádů a platí
$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Příklad 1. Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):

(a) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \ldots)$,

(b) $(1^2, 2^2, 3^2, \ldots)$,

(c) $(1, -3, 5, -7, 9, -11, \ldots)$,

Příklad 2. Posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ má generující funkci $g(x)$. Jakou generující funkci pak bude mít posloupnost částečných součtů $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$?

Jaká je vytvořující funkce posloupnosti $(0, 2, 6, 12, 20, \ldots)$? tj. když n-tý člen je součtem prvních n sudých přirozených čísel včetně nuly.

Příklad 3. V následujících příkladech vždy sestrojte příslušnou mocninou řadu, nemusíte dopočítávat výsledný koeficient:

(a) Kolik existuje celočíselných řešení rovnice $x + y + z = 12$ pro sudé z a $0 \leq x, y \leq 4$?

(b) V cukrárně prodávají tři druhy zákusků – větrníky, kremrole a punčové dortíky. Kolika způsoby lze koupit 12 zákusků tak, aby se od každého druhu koupily alespoň dva zákusky a přitom nejvýš tři kremrole?

Příklad 4. Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 9$ a $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ pro $n \geq 0$.

Příklad 5. Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ a $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ pro $n \geq 0$.

Příklad 6. Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $c_0 = 1$ a $c_{n+1} = 7c_n + 6^{n+1}$ pro $n \geq 0$.

Základní operace s mocninnými řadami:		
operace	výsledek	n-tý člen
$a(x) + b(x)$	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$	$a_n + b_n$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \ldots)$	αa_n
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots, \alpha^i a_i, \ldots)$	$\alpha^n a_n$
$x^k a(x)$	$(0, \ldots, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$ (k nul na začátku)	a_{n-k}
$a(x^k)$	$(a_0, 0, \ldots, 0, a_1, 0, \ldots)$ (střídavě $k-1$ nul)	$a_{\frac{n}{k}}$ nebo 0
$\frac{a(x) - a_0 - \cdots - a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}$	$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$	a_{n+k}
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, ia_i, \ldots)$	$(n+1)a_{n+1}$
$\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_i}{i+1}, \ldots)$	$\frac{a_{n-1}}{n}$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \ldots)$, kde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$	$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$