Kombonatorika a Grafy 1 - Cvičení 2

Jan Soukup

9-11.10.2023
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG/

1 Vytvořující funkce

Mocninná řada je řada tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ a x je reálná proměnná. Jako *(obyčejnou) vytvořující funkci* posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ označíme součet mocninné řady $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je podle vzorce pro součet geometrické řady vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$ a podle binomické věty je $(1+x)^n$ vytvořující funkcí posloupnosti $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n})$.

Přechod mezi posloupnostmi a funkcemi bude klíčový v kombinatorických aplikacích.

Tvrzení 1. Buď $(a_0, a_1, \dots)$ posloupnost reálných čísel. Nechť existuje K takové, že $|a_n| \leq K^n$ pro všechna n. Potom

(a) Pro každé řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ stejnoměrně absolutně konverguje na intervalu $(\frac{-1}{K}, \frac{1}{K})$ a hodnota jejího součtu definuje funkci $a(x)$ proměnné x na uvedeném intervalu.

(b) Navíc derivace a neurčitý intergrál se dají počítat "člen po členu".

(c) Hodnotami $a(x)$ na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy $a_0, a_1, \dots$ jednoznačně určeny, $a(x)$ má v 0 derivace všech řádů a platí

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Příklad 1. Mějme vytvořující funkce $f(x), g(x)$ posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, respektive $(b_0, b_1, \dots)$. Najděte posloupnosti odpovídající následujícím vytvořujícím funkcím. Vyzkoušjte si co dostanete pro $f(x) = g(x) = \frac{1}{1-x}$.

(a) $f(2x)$

(b) $3f(x^2)$

(c) $3x^3 f(x^2)$

(d) $f(x) + g(x)$

(e) $\frac{f(x) - a_0 - a_1 x}{x}$

(f) $f'(x)$

(g) $\int_0^x f(t) \mathrm{d}t$

(h) $f(x)g(x)$

Příklad 2. Podívejme se pár příkladů z minula, kde máme sečíst následující řady.

(a) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{32} - \frac{x^6}{64} + \dots$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} k x^{2k} = x^2 + 2x^4 + 3x^6 + 4x^8 + \dots$

Příklad 3. Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):

(a) $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \dots)$,

(b) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \ldots)$,

(c) $(1^2, 2^2, 3^2, \ldots)$,

(d) $(1, -3, 5, -7, 9, -11, \ldots)$,

Příklad 4. Posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ má generující funkci $g(x)$. Jakou generující funkci pak bude mít posloupnost částečných součtů $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$?

Jaká je vytvořující funkce posloupnosti $(0, 2, 6, 12, 20, \ldots)$? tj. když n-tý člen je součtem prvních n sudých přirozených čísel včetně nuly.

Příklad 5. Určete koeficient (stačí napsaný jako suma)

(a) u x^4 v $\frac{1}{x^2-5x+6}$

(b) u x^{12} v $x^6 \cdot \frac{x+1}{(1-x)^2}$.