Kombinatorika a Grafy 1 - Cvičení 13

Jan Soukup

10.1.2024
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG/

1 Ramsayova věta

Definice 1. *Definujme* Ramseyovo číslo $R(k,l)$ *jako nejmenší* $N \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé obarvení hran grafu* K_N *červenou a modrou barvou existuje červené* K_k, *nebo modré* K_l *jako podgraf* K_N.

Tvrzení 1. Pro každé k, l je číslo $R(k,l)$ konečné. Dokonce $R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Definice 2. *Definujeme* ramseyovo číslo $R_p(n_1, \ldots, n_r)$ *jako nejmenší* $N \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* r*-obarvení* $\binom{[N]}{p}$ *existuje* $i \in \{1, \ldots, r\}$ *a* $Y \subseteq [N]$ *velikosti* n_i *takové, že všechny prvky* $\binom{Y}{p}$ *jsou obarveny* i*-tou barvou.*

Tvrzení 2. Pro každé $p, r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ je číslo $R_p(n_1, \ldots, n_r)$ konečné.

Ramseyova věta platí dokonce i v následující nekonečné verzi.

Tvrzení 3. Pro každé $p, k \in \mathbb{N}$ a pro každé r-obarvení množiny $\binom{\mathbb{N}}{p}$ existuje nekonečná $X \subseteq \mathbb{N}$ taková, že všechny její p-tice mají v daném r-obarvení stejnou barvu.

Příklad 1. Dokažte, že pro každé n existuje N takové, že každých N bodů v rovinně v obecné poloze (žádné tři neleží na společné přímce) obsahuje n bodů ležící ve vrcholech konvexního mnohoúhelníka.

Příklad 2. Předchozí příklad je znění Erdős–Szekeresovy větu pro dimenzi 2, dokažte jí i pro dimenzi 3. Neboli ukažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje přirozené $N = N(k)$ takové, že každá množina N bodů z $\mathbb{R}^3$ v obecné poloze (žádné 4 body neleží na společné rovině) obsahuje k bodů, které jsou vrcholy konvexního mnohostěnu.

Můžete přímo využít Erdősovu–Szekeresovu větu v dimenzi 2. Nebo kopírovat její důkaz.

Příklad 3. Mějme nekonečnou množinu bodů S v rovině. Dokažte, že existuje nekonečná podmnožina S obsahující pouze body ležící na přímce, nebo pouze body v obecné poloze (žádné tři neleží na přímce).

2 Samoopravné kódy

Abeceda Σ je konečná množina q *symbolů. Slovo* délky n je uspořádání n-tice symbolů. Jako Σ^n označíme množinu slov délky n. *Hammingova vzdálenost* slov $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Sigma^n$ je definována jako $d(x,y) = |\{i \in \{1, \ldots, n\} : x_i \neq y_i\}|$. (Blokový) kód je množina $C \subseteq \Sigma^n$ takzvaných *kodových slov.* Řekneme, že s kódem C je možné *opravit nanejvýš t chyb*, pokud pro každé $y \in \Sigma^n$ existuje nanejvýš jedno $x \in C$ takové že $d(x,y) \leq t$. *Parametry* kódu C jsou $(n,k,d)_q$, kde $k = \log_q |C|$ a $d = \min_{x \neq y \in C}\{d(x,y)\}$.

Lineární kód C je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{F}_q^n$, kde $\Sigma = \mathbb{F}_q$ je konečné těleso velikost q (jinými slovy obsahuje "nulové"slovo a je uzavřený na "sčítání a odečítání"slov mezi sebou).

Příklad 4. Určete parametry následujících kódů

- $\{00000, 00111, 11011, 11100\}$
- $\{111, 100, 001, 010\}$
- $\{00000, 01111, 10100, 11011\}$

Příklad 5. Dokažte, že Hammingova vzdálenost je nad Σ^n metrikou.

Příklad 6. Nechť C je kód s parametry $(n, k, 2t+1)_2$ nad abecedou $\{0, 1\}$. Rozhodněte, jaké jsou parametry C', který z C vznikne prodloužením každého kódového slova o jeden symbol určující paritu počtu jedniček v daném slově.

Příklad 7. Uvažme kód obsahující všechna slova délky $n \geq 2$ nad $\{0, 1\}$ sudé váhy, neboli $C = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_2^n : \sum_{i=1}^n x_i \equiv 0 \pmod 2\}$. Určete parametry tohoto kódu, ověřte, že je lineární.

Příklad 8. Mějme 3-znakovou abecedu (třeba $\Sigma = \{0, 1, 2\}$). Ukažte, že pokud kód $C \subseteq \Sigma^4$ opravuje jednu chybu (jednu jakkoliv změněnou pozici), potom obsahuje nejvýše 9 slov.