Kombinatorika a Grafy 1 - Cvičení 12

Jan Soukup

18.12.-20.12.2023
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG/

1 Ramsayova věta

Definice 1 (Dirichletův princip (případně princip holubníku))**.** *Nechť máme alespoň* $(n + 1)$ *holubů v holubníku o n přihrádkách. Pak v některé přihrádce jsou alespoň dva holubi.*

Trochu obecněji: Nechť máme alespoň $(mn + 1)$ *holubů v holubníku o* n *přihrádkách. Pak v některé přihrádce je alespoň* $(m + 1)$ *holubů.*

Jinak řečeno, pro každé n existuje N takové, že při obarvení vrcholů grafu K_N pomocí k barev existuje jednobarevná podmnožina vrcholů velikosti n.

Zobecníme to na barvení hran grafu (a obdobně by jsme mohli i na hrany hypergrafu).

Definice 2. *Definujme* Ramseyovo číslo $R(k, l)$ *jako nejmenší* $N \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé obarvení hran grafu* K_N *červenou a modrou barvou existuje červené* K_k*, nebo modré* K_l *jako podgraf* K_N*.*

Tvrzení 1. Pro každé k, l je číslo $R(k, l)$ konečné. Dokonce $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Z přednášky také víme nebo si ukážete, že $R(3, 3) = 6$ a $R(k, k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$ pro každé $k, l \in \mathbb{N}$.

Označíme-li pro grafy H_1, H_2 jako $R(H_1, H_2)$ nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé 2-obarvení hran grafu K_N existuje $i \in \{1, 2\}$ takové, že dané 2-obarvení obsahuje H_i jako podgraf se všemi hranami obarvenými i-tou barvou, pak z Ramseyovy věty dostáváme $R(H_1, H_2) \leq R(|V(H_1)|, |V(H_2)|)$. Tedy i tato Ramseyovská čísla obecných grafů jsou vždy konečná.

Příklad 1. Dokažte, že pro každé $k, \ell \in \mathbb{N}$, existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že každá posloupnost přirozených čísel obsahuje neklesající podposloupnost délky k nebo nerostoucí podposloupnost délky ℓ.

(*) Dokažte, že dokonce stačí volit $N = (k - 1)(l - 1) + 1$.

Příklad 2. Dokažte, že pro každé obarvení všech přirozených čísel (bez nuly) dvěma barvami najdeme $x, y \in \mathbb{N}$ takové, že x, y a $x + y$ mají stejnou barvu.

Hint: chceme použít Ramsayovu větu, takže barvení čísel ze zadání musí odpovídat barvení hran, takže se asi vyplatí mít graf kde vrcholy jsou čísla a hrany také.

Příklad 3. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Obarvíme-li dostatečně velký úplný graf se smyčkami dvěma barvami (barvíme hrany a smyčky), vždy existuje jednobarevný úplný podgraf se smyčkami na n vrcholech.

(b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo doplněk G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf.

(c) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo G obsahuje doplněk $K_{n,n}$ jako podgraf.

(d) Pro každý graf G existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že v libovolném 2-obarvení hran K_N najdeme jednobarevnou G jako indukovaný podgraf.

Příklad 4.

(a) Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo $M(n)$ takové, že každá $\{0,1\}$-matice s rozměry $M(n) \times M(n)$ obsahuje $n \times n$ podmatici, která obsahuje buď jen nuly nebo jen jedničky.

(b) Sestrojte libovolně velkou $\{0,1\}$-matici, která neobsahuje 2×2 matici se samými jedničkami a ani 2×2 matici se samými nulami jako *diagonální podmatici*. Matice A o rozměrech $n \times n$ je diagonální podmaticí matice B o rozměrech $N \times N$, pokud existuje $R \subseteq \{1, \ldots, N\}$, $|R| = n$, taková, že vybráním řádků a sloupců matice B s indexy z R získáme matici A.

(c) Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo $DM(n)$ takové, že každá $\{0,1\}$-matice s rozměry $DM(n) \times DM(n)$ obsahuje $n \times n$ diagonální podmatici, která má všechny prvky na diagonále totožné, všechny prvky nad diagonálou totožné a také všechny prvky pod diagonálou totožné.

Místo dvojic (hran) můžeme obarvovat p-tice a Ramsayova věta bude pořád platit. Dokonce můžeme použít i více barev:

Definice 3. *Definujeme* ramseyovo číslo $R_p(n_1, \ldots, n_r)$ *jako nejmenší* $N \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* r*-obarvení* $\binom{[N]}{p}$ *existuje* $i \in \{1, \ldots, r\}$ *a* $Y \subseteq [N]$ *velikosti* n_i *takové, že všechny prvky* $\binom{Y}{p}$ *jsou obarveny* i*-tou barvou.*

Tvrzení 2. Pro každé $p, r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ je číslo $R_p(n_1, \ldots, n_r)$ konečné.

Příklad 5. Dokažte, že pro každé n existuje N takové, že každých N bodů v rovinně v obecné poloze (žádné tři neleží na společné přímce) obsahuje n bodů ležící ve vrcholech konvexního mnohoúhelníka.