Kombinatorika a Grafy 1 - Cvičení 11

Jan Soukup

11.12.-13.12.2023
`https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG/`

1 Počty koster a počítání dvěma způsoby

Kostra v grafu $G = (V, E)$ je stromem $T = (V, E')$ s $E' \subseteq E$. Neboli T je souvislým podgrafem grafu G na stejné množině vrcholů a T navíc neobsahuje cyklus. Graf má kostru právě tehdy, když je souvislý. Pro graf G označme jako $\kappa(G)$ počet koster grafu G.

Tvrzení 1. Pro každé celé číslo $n \geq 2$ je počet koster úplného grafu K_n na n vrcholech roven n^{n-2}. Neboli $\kappa(K_n) = n^{n-2}$.

Příklad 1. Pro úplný graf K_n a jednu jeho zvolenou hranu e spočtěte, pomocí počítání dvěma způsoby, kolik koster K_n obsahuje hranu e.

Příklad 2. Pomocí předcházejícího cvičení spočtěte počet koster grafu G, který vznikne z úplného grafu K_n odebráním hrany.

Příklad 3. Spočtěte počet koster v grafu $C_m \oplus_e C_n$, tedy graf, který vznikne slepením cyklů za společnou hranu e.

Příklad 4. Počítáním dvěma způsoby dokažte, že pro přirozené n platí

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

Příklad 5. Má-li rovinný graf celkem 12 stěn, každá z nich je pětiúhelník a každý vrchol má stupeň 3, kolik má vrcholů?

Příklad 6. Mějme matici A o rozměrech $n \times n$ takovou, že $A_{i,j} = ij$. Spočtěte dvěma způsoby součet všech jejích prvků a dokažte tím vzorec $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

Příklad 7. Spočtěte počet koster v následujících grafech:

(a) $K_n \div e$, tedy grafu K_n s jednou podrozdělenou hranou e,

(b) $K_n \div E$, tedy grafu K_n se všemi hranami podrozdělenými,

(c) $C_m \oplus_e K_n$.