Kombinatorika a Grafy 1 - Cvičení 10

Jan Soukup

4.12.-6.12.2023
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG/

1 Vrcholová a hranová souvislost

Nechť $G = (V, E)$ je graf. G je souvislý, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. *Hranový řez* G je množina $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez* G je množina $C \subseteq V$ taková, že graf $G - C$ je nesouvislý.

Hranová souvislost G (značíme $k_e(G)$) je velikost nejmenšího hranového řezu G. *Vrcholová souvislost* G ($k_v(G)$) je $k-1$, pokud $G = K_k$ a $k > 1$, 1 pokud $G = K_1$, a velikost nejmenšího vrcholového řezu G jinak. Graf je vrcholově (resp. hranově) k-souvislý, pokud $k_v(G) \geq k$ resp. $k_e(G) \geq k$.

Na přednášce jste si dokázali/dokážete si, že $k_e(G) - 1 \leq k_e(G-e) \leq k_e(G)$ a $k_v(G) - 1 \leq k_v(G-e) \leq k_v(G)$.

Dále víme:

Tvrzení 1 (Fordova–Fulkersonova věta)**.** $k_e(G) \geq t$ právě když mezi každými dvěma vrcholy existuje alespoň t hranově disjunktních cest.

Tvrzení 2 (Mengerova věta)**.** Pokud $G \neq K_1$ tak $k_v(G) \geq t$ právě když mezi každými dvěma vrcholy existuje alespoň t vrcholově disjunktních cest (koncově body jsou společné).

Tvrzení 3 (Ušaté lemma)**.** Graf G je 2-souvislý právě tehdy, když jej lze získat z cyklu postupným přidáváním uší.

2 Příklady

Příklad 0. Nechť G je vrcholově 2-souvislý graf a x, y jeho dva vrcholy. Ukažte, že v G existuje cyklus obsahující x a y.

Příklad 1. Nechť $G = (V, E)$ je vrcholově k- souvislý. Dokažte, že přidáním nového vrcholu stupně alespoň k dostaneme zase vrcholově k-souvislý graf.

Příklad 2. Nechť G je souvislý graf na alespoň 3 vrcholech. Ukažte, že je 2-souvislý právě když pro každé dvě jeho hrany e_1, e_2 existuje cyklus obsahující e_1 a e_2.

Příklad 3. Ukažte, že graf s alespoň třemi vrcholy je 2-souvislý právě když pro každé tři různé vrcholy x, y, z platí, že existuje cesta z x do z přes y.

Příklad 4. Ukažte, že graf je 2-souvislý právě když jde vyrobit z trojúhelníku pomocí postupného přidávání a podrozdělování hran.

Příklad 5. Graf G je kriticky 2-souvislý, pokud $k_v(G) \geq 2$, ale $k_v(G-e) \leq 1$ pro všechny hrany $e \in E(G)$. Dokažte, že G má vrchol stupně 2.

Příklad 6. Ukažte, že každý v každém 3-regulárním grafu platí $k_v(G) = k_e(G)$, neboli vrcholová a hranová souvislost je stejná.

Příklad 7. Rozhodněte, jestli každý souvislý graf se sudými stupni a alespoň jednou hranou nutně vrcholově (hranově) 2-souvislý.