

Kombinatorika a Grafy 1 - Cvičení 1

Jan Soukup

2-4.10.2023

<https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG/>

Opakování

Příklad 0. Kolika způsoby lze z n rozlišitelných kuliček vybrat uspořádanou k -tici? A kolika neuspořádanou? A kolika neupřádanou k -tici pokud můžeme každou kuličku vybrat vícekrát?

Příklad 1. Kolik existuje možností, jak rozmístit n nerozlišitelných kuliček do p rozlišitelných přihrádek? Co když žádná přihrádka nesmí být prázdná? A co v případě když jsou kuličky rozlišitelné a přihrádky mohou být i prázdné?

Příklad 2. Kolik řešení má v množině nezáporných celých čísel rovnice $x_1 + \dots + x_n = c$ (kde c je dané přirozené číslo).

- A co v množině přirozených čísel?
- A co v množině sudých přirozených čísel?

Příklad 3. Určete koeficient

- u x^7 ve výrazu $(1 + x + x^2 + \dots + x^{10})^{20}$,
- u x^{15} ve výrazu $(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4$,
- u x^{28} ve výrazu $(x + x^3 + x^5 + \dots)^6$,
- u x^{17} ve výrazu $(1 + x^2 + x^4 + \dots)^{10}$.

Příklad 4. Rozmyslete si pomocí poznatků z matematické analýzy, že $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ pro libovolné $x \in (-1, 1)$. (Součet řady je definovaný jako limita částečných součtů).

Příklad 5. Podobně jako v předchozím případě předpokládejte, že x je z malého okolí nuly a najděte kompaktní tvar následujících součtů řad. (Už můžete předpokládat, že řady absolutně konvergují a tedy součty existují).

- $\sum_{k=0}^{\infty} (-2x)^k = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 + \dots$
- $\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots$
- $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$
- $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{32} - \frac{x^6}{64} + \dots$
- $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{2k} = x^2 + 2x^4 + 3x^6 + 4x^8 + \dots$