

7. CVIČENÍ Z KG 2, PONDĚLÍ 27.3.

Barvení grafů

1. Ukažte, že pokud má d -regulární graf hranové d -obarvení, pak má i perfektní párování.

2. Jaká je hranová barevnost kliky K_n ?

3. Dokažte, že bipartitní graf G lze hranově obarvit $\Delta(G)$ barvami, tedy $\chi'(G) \leq \Delta(G)$. (Hint: zkuste neprve předpokládat, že G je d -regulární.)

4. Nalezněte nekonečnou množinu hranově 3-souvislých kubických (tedy 3-regulárních) grafů G_n s $\chi'(G_n) = 4$. (Hint: nejprve najděte jeden takový graf a pak vymyslete, jak ho zvětšovat.)

5. *Duální graf* G^* rovinného grafu G je graf, kde vrcholy jsou stěny G a hrana v G^* vede mezi dvěma stěnami, pokud tyto stěny sdílejí hranu. Nechť G je hranově 2-souvislý 3-regulární graf nakreslený v rovině. Z věty o čtyřech barvách je duální graf G^* ke G vrcholově 4-obarvitelný. Ukažte, že z toho plyne, že G má hranovou barevnost 3.

6. Nechť G je triangulace roviny (tedy každá stěna je trojúhelník). Mějme duální graf G^* a předpokládejme, že je hranově obarvený třemi barvami, tedy $\chi'(G^*) \leq 3$. Ukažte, že vrcholy G lze obarvit čtyřmi barvami.

Bonus: Z posledních dvou příkladů zkuste zformulovat tvrzení o hranovém obarvení, které je ekvivalentní větě o čtyřech barvách.