Kombonatorika a Grafy 2 - Cvičení 9

Jan Soukup

12.4.2023
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG2/

1 Chordální grafy

Definice 1. *Graf G je* chordální*, pokud neobsahuje kružnici délky ≥ 4 jako indukovaný podgraf.*

Definice 2. *Vrchol $v \in V(G)$ je* simpliciální*, pokud množina všech jeho sousedů indukuje kliku v G.*

Definice 3. Perfektní eliminační schéma (PES) *grafu G je uspořádání vrcholů vrcholů G do posloupnosti $v_1, \ldots, v_n$ takové, že pro každé $i \in [n]$ platí, že sousedi v_i mezi vrcholy $v_1, \ldots, v_{i-1}$ tvoří kliku v G.*

1.1 Příklady

Příklad 1. Chordální grafy jsou grafy bez indukovaných cyklů délky ≥ 4. Rozmyslete si jak vypadají grafy bez bez ~~indukovaných~~ cyklů délky ≥ 4.

Příklad 2. Dokažte, že graf G je chordální právě když má PES.
(Hint: pro nalezení PSA použijete větu o simpliciálním vrcholu, pro opačnou implikaci vyjděte z definice a použijte obměnu nebo spor.)

Příklad 3. Rozmyslete si, že chodální grafy jsou perfektní. (hint: pomocí psa nalezněte algoritmus na barvení chordálního grafu)

Příklad 4. Ukažte, že chordální graf na n vrcholech má nejvýš n maximálních klik (obecně si rozmyslete, že graf jich může mít až exponenciálně mnoho).

Příklad 5. Z přednášky víte, že pokud je souvislý graf chordální, tak je každý minimální řez klika. Ukažte, že opak neplatí. Tedy najděte příklad souvislého grafu G, jehož každý minimální řez je klika, ale G není chordální.

Příklad 6. Graf G je *průnikový graf podstromů*, jestliže existuje strom T a funkce η přiřazující každému vrcholu G (souvislý a neprázdný) podstrom stromu T tak, že každé dva vrcholy u a v tvoří hranu G právě když $\eta(u) \cap \eta(v) \neq \emptyset$. Ukažte, že každý průnikový graf podstromů je chordální.

Příklad 7. Ukažte, že každý chordální graf je průnikový graf podstromů nějakého stromu.
(hint: Postupujte indukcí. Přidávejte simpliciální vrchol.)

2 Když bude čas

Příklad 8. Buď $\mathcal{G}$ třída grafů G, že pro každé H indukovaný podgraf G platí, že každá maximální klika H protíná každou maximální nezávislou množinu H. Dokažte, že

- $\mathcal{G}$ jsou perfektní a najděte perfektní G, který není v $\mathcal{G}$
- $\mathcal{G}$ jsou právě grafy neobsahující indukovanou P_4 (cesta na 4 vrcholech)