Kombonatorika a Grafy 2 - Cvičení 8

Jan Soukup

5.4.2023

`https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG2/`

1 Perfektní grafy

Definice 1. *G je* perfektní*, jestliže pro každý indukovaný podgraf H grafu G platí*

$$\chi(H) = \omega(H).$$

1.1 Příklady

Příklad 1. Ukažte, že doplněk liché kružnice na alespoň pěti vrcholech, tedy $\overline{C_{2k+1}}$ pro $k \geq 2$, není perfektní a speciálně má větší barevnost χ než klikovost ω.

Příklad 2. Split graf je takový graf, v němž lze rozdělit vrcholy na dvě části K a N, přičemž K tvoří kliku a N nezávislou množinu (hrany mezi K a N mohou být libovolné) – ukažte, že takové grafy jsou perfektní.

Příklad 3. Ukažte, že *doplňky bipartitních grafů jsou perfektní* a to bez použití slabé věty o perfektních grafech.

(hint: Rozmyslete si čemu odpovídají maximální barevné třídy a aplikujte Königovu větu. Případně to půjde i indukcí.)

Příklad 4. Dokažte, že v libovolném perfektním grafu existuje RoNeMno (Rozsáhlá nezávislá množina), tedy nezávislá množina protínající všechny kliky v G velikosti $\omega(G)$ (čili obsahuje alespoň jeden vrchol z každé největší kliky). Jak zajistit, aby nalezené RoNeMno obsahovalo předepsaný vrchol?

Příklad 5. Mějme G takový, že každý jeho indukovaný podgraf má RoNeMno. Ukažte, že G je perfektní.

Příklad 6. Nechť G je graf a v jeho vrchol. Buď H graf, v němž nahradíme v klikou, přičemž vrcholy v klice mají stejné sousedy mimo kliku jako mělo v. Ukažte, že G je perfektní právě tehdy, když H je perfektní.

(Hint: Stačí využít předchozí dvě cvičení)

2 Když bude čas

Příklad 7. Buď $\mathcal{G}$ třída grafů G, že pro každé H indukovaný podgraf G platí, že každá maximální klika H protíná každou maximální nezávislou množinu H. Dokažte, že

- $\mathcal{G}$ jsou perfektní a najděte perfektní G, který není v $\mathcal{G}$
- $\mathcal{G}$ jsou právě grafy neobsahující indukovanou P_4 (cesta na 4 vrcholech)