Kombonatorika a Grafy 2 - Cvičení 6

Jan Soukup

22.3.2023
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG2/

1 Grafy na plochách

1.1 Opakování

Definice 1. *Eulerovský rod* $g(\Sigma)$ *plochy* Σ *vzniklé přidáním* k *křižítek a* u *uch na sféru je*

$$g(\Sigma) := k + 2u.$$

Definice 2. *Eulerovská charakteristika* $\mathrm{ec}(\Sigma) = 2 - g(\Sigma)$.

Plocha	Eulerovský rod	Eulerovská charakteristika
sféra Σ_0	0	2
projektivní rovina Π_1	1	1
torus Σ_1	2	0
Kleinova láhev Π_2	2	0
double-torus Σ_2	4	-2
Σ_u	$2u$	$2-2u$
Π_k	k	$2-k$

Tvrzení 1 (Zobecněná Eulerova formule)**.** Nechť G je nakreslený na ploše Σ. Pak

$$|E(G)| \leq |V(G)| + |F(G)| + g(\Sigma) - 2 = |V(G)| + |F(G)| - \mathrm{ec}(\Sigma).$$

Rovnost nastává právě když nakreslení G je *buňkové* (každá stěna je otevřený disk).

$$H(\Sigma) := \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 24g(\Sigma)}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\mathrm{ec}(\Sigma)}}{2} \right\rfloor$$

Tvrzení 2 (Heawoodova formule)**.** Každý graf nakreslený na ploše $\Sigma \neq \Sigma_0$ obsahuje vrchol stupně nejvýše $H(\Sigma) - 1$, a lze ho tedy obarvit $H(\Sigma)$ barvami.

1.2 Příklady

Příklad 1. Nakreslete K_6 na projektivní rovinu a K_7 na torus. Rozmyslete si co jsou stěny ve vašem nakreslení. Pomocí dalšího příkladu si rozmyslete, že větší kliky nakreslit nelze.

Příklad 2. Nechť G je nakreslený na ploše Γ a má alespoň 3 vrcholy. Ukažte, že ze zobecněné Eulerovy formule plyne

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 3\mathrm{ec}(\Gamma),$$

kde rovnost nastane právě když je nakreslení buňková trinagulace. A jestliže G neobsahuje trojúhelník, pak $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 2\mathrm{ec}(\Gamma)$.

Příklad 3. Ukažte, že nakreslení K_7 na torus je triangulace toru (tedy je buňkové a každá stěna je ohraničena trojúhelníkem v grafu).

Příklad 4. Nechť $\Delta(G)$ je maximální stupeň v grafu G. Ukažte, že vrcholy G lze obarvit $\Delta(G)+1$ barvami tak, aby žádná hrana nebyla jednobarevná, tedy barevnost G je nejvýše $\Delta(G)+1$.

(Na přednášce bude Brooksova věta, která říká, že pro souvislý graf stačí $\Delta(G)$ barev, ledaže jde o lichý cyklus nebo úplný graf.)

Příklad 5. Dokažte, že graf nakreslitený na Kleinově láhvi má barevnost nejvýše 6. (Hint: podobně jako na přednášce uvažte minimální protipříklad a ukažte dolní odhad na minimální stupeň. Může se hodit Brooksova věta a fakt, že K_7 *nelze* nakreslit na Kleinovu láhev.)

2 Když bude čas

Příklad 6. Zkuste nalézt alespoň dvě různá (nehomeomorfní) nakreslení K_5 na toru.

Příklad 7. Nakreslete Petersenův graf na projektivní rovinu a torus.

Příklad 8. Ukažte, že přidáním „překrouceného“ ucha na sféru vznikne Kleinova láhev.

Příklad 9. Nalezněte graf, který lze nakreslit na torus tak, že má všechny stěny ohraničeny čtyřcyklem a přitom má barevnost tři. Dále najděte graf, který s barevností čtyři a nakreslením v projektivní rovině, jež má všechny stěny čtyřúhleníkové.