Kombonatorika a Grafy 2 - Cvičení 3

Jan Soukup

1.3.2023
`https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG2/`

1 Párování

Tvrzení 1 (Tutte)**.** Graf G má perfektní párování právě tehdy, když pro každou $A \subseteq V(G)$ je počet lichých komponent v $G \setminus A$ menší nebo roven $|A|$.

*Dokonce obecněji platí, že velikost největšího párování v libovolném grafu G je rovna

$$\frac{|V(G)| - \max_{A \subseteq V(G)}(\mathrm{odd}(G \setminus A) - |A|)}{2}$$

kde $\mathrm{odd}(G \setminus A)$ je počet lichých komponent v $G \setminus A$.

Tvrzení 2 (Petersen)**.** Každý kubický (tedy 3-regulární) graf bez mostů má perfektní párování.

Příklad 1. Dokažte, že každý souvislý graf, který není úplný, obsahuje *indukovanou* cestu na třech vrcholech, tedy indukovaný podgraf $K_{1,2}$.

Příklad 2. Nechť G je graf, kde každý vrchol má lichý stupeň. Ukažte, že pak pro libovolnou množinu $A \subseteq V(G)$ liché velikosti platí, že mezi A a $V(G) \setminus A$ vede lichý počet hran.

Příklad 3. Dokažte Petersenovu větu ověřením Tutteovy podmínky (podmínka pro existenci perfektního párování) za pomoci předchozího příkladu.

Příklad 4. Najděte graf bez perfektního párování, který

a) je 3-regulární a souvislý (ale ne 2-souvislý)

b) je 2-souvislý a má všechny stupně ≥ 3

Příklad 5. Dokažte, že pro každou hranu kubického grafu bez mostů existuje perfektní párování, které ji neobsahuje.

Příklad 6. Dokažte, že každý k-regulární hranově $(k-1)$-souvislý graf na sudém počtu vrcholů má perfektní párování.

Příklad 7. Nalezněte k-regulární hranově $(k-2)$-souvislý graf na sudém počtu vrcholů, který nemá perfektní párování. (Hint: Řešte separátně pro lichá a sudá k, pro sudá je to lehčí.)