

Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 2

Jan Soukup

22.2.2023

<https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG2/>

1 Edmondsův kytičkový algoritmus

Lemma 1 (Lemma VSC (o volné střídávě cestě)). Mějme graf G a v něm párování M . Pak G obsahuje volnou střídávou cestu (VSC) vůči M právě tehdy, když M není největší.

Lemma 2 (Lemma KK (o kontrakci květu)). Mějme graf G a v něm párování M . Nechť je v G *kytka*, kterou tvoří stoněk S a květ C . Pak G obsahuje volnou střídávou cestu (VSC) vůči M právě tehdy, když G/C (G se zkontrahovaným květem C) obsahuje VSC.

Příklad 1 (Kompletace Edmondsova algoritmu). Na přednášce jsme si ukazovali algoritmus NAJDIVSC-NEBOKYTKU(G, M), která v G najde volnou střídávou cestu (VSC) nebo kytku vůči párování M anebo korektně ohlásí, že M je největší párování v M .

- (1) Popište celý algoritmus, který najde největší párování v M za pomoci procedury NAJDIVSCNEBOKYTKU.
- (2) Určete časovou složitost vzhledem k počtu vrcholů n a počtu hran m .
- (3*) Zkuste najít příklad, na němž je analýza časové složitosti těsná (odhad na počet iterací nebo počet rekurzivních volání nelze zlepšit).

(Algoritmus lze zrychlit pomocí chytrých datových struktur, ale to není třeba rozmýšlet)

Příklad 2 (Lemma KK (o kontrakci květu)). K úplnosti analýzy Edmondsova algoritmu nám už chybí dokázat jen Lemma KK.

- (1) Nechť M je párování v G a $M \setminus C$ je párování v G/C . Ukažte, že pokud $M \setminus C$ není největší v G/C , pak ani M není největší v G .
- (2) Dokažte opačnou implikaci za předpokladu, že vrchol v_0 (tedy vrchol v průniku květu a stonku) je *volný* (to speciálně nastane, když má stoněk délku 0).
- (3) Jak se tohoto předpokladu elegantně zbavit?
- (4) Nechť máme VSC P' v zkontrahovaném grafu G/C vůči $M \setminus C$. Jak z ní efektivně zkonstruovat VSC P v G vůči M ?

Příklad 3. Dokažte, že strom T má perfektní párování právě tehdy, když pro každý jeho vrchol v má $T - v$ právě jednu lichou komponentu.

Příklad 4. Dostali jsme dva čtverce papíru o obsahu přesně 2023, oba rozdělené na 2023 mnohoúhelníků o jednotkovém obsahu. Rozdělení na mnohoúhelníky může být na každém papíře různé. Položíme papíry na sebe a chceme je propíchnout 2023 krát tak, abychom propíchnuli vnitřek každého mnohoúhelníku na obou papírech (4046 propíchnutí by bylo triviální, stačilo by vzít propíchat každý papír zvlášť).

Příklad 5. Mějme bipartitní graf $G = (A \cup B, E)$. Předpokládejme, že existuje párování M_A , které pokryje množinu $X_A \subseteq A$, a jiné párování M_B , které pokryje množinu $X_B \subseteq B$. Najděte párování, které pokryje množinu $X_A \cup X_B$.

Příklad 6. Zobecněné piškvorky na čtverečkovém papíru jsou dané množinou \mathcal{V} vyhrávajících linií (každá vyhrávající linie je množina políček). Předpokládejme, že každá vyhrávající linie má alespoň 10 políček a každé políčko je v nejvýše pěti vyhrávajících liniích. Ukažte, že za těchto podmínek má druhý hráč neprohrávající strategii.