# Kombonatorika a Grafy 2 - Cvičení 12

Jan Soukup

3.5.2023
`https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG2/`

## 1 Exponenciální vytvořující funkce a Burnsideovo lemma

**Definice 1.**
*Jako* exponenciální vytvořující funkci (evf) *posloupnosti* $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ *označíme mocninnou řadu* $A(x) = a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + \cdots$.

**Definice 2.** *Poloměr konvergence* $R$ *mocninné řady* $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ *je*

$$R = \sup\{c > 0 : \ |a_n| \leq \left(\frac{1}{c}\right)^n \text{ až na konečně mnoho } n\}.$$

**Důsledek 1.** *Víme, že* $|a_n| \leq \left(\frac{1}{R-\varepsilon}\right)^n$.

Poloměr konvergence mocninné řady s kladnými koeficienty můžeme najít jako první kladné $x$, kde naše vytvořující funkce přestane být definována.

**Lemma 1** (Operace s vytvořujícími funkcemi).
**Obyčejné vytvořující funkce:**

| Operace | koeficient u $x^n$ | Význam |
|---|---|---|
| Součet $A(x) + B(x)$ | $a_n + b_n$ | (disjukntní) sjednocení |
| Součin $A(x)B(x)$ | $\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ | kartézský součin |
| (*) $\frac{1}{1-A(x)}$ | $\sum_{k\geq 0}[x^n]A^k(x)$ | konečné posloupnosti |

**Exponenciální vytvořující funkce:**

| Operace | koeficient u $x^n/n!$ | Význam |
|---|---|---|
| Součet $A(x) + B(x)$ | $a_n + b_n$ | (disjukntní) sjednocení |
| Součin $A(x)B(x)$ | $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i b_{n-i}$ | proložená dvojice |
| (*) $e^{A(x)}$ | $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}[x^n]A^k(x)$ | vytvoření z komponent |

**Definice 3.**

- Akce $\alpha$ *grupy* $\Gamma$ *na množině* $\mathcal{A}$ *je funkce* $\Gamma \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *tž.*
  - $\alpha(\mathrm{id}, x) = x$
  - $\alpha(\pi_1 \circ \pi_2, x) = \alpha(\pi_1, \alpha(\pi_2, x))$.
- Orbita $[x]$ *prvku* $x \in \mathcal{A}$: $\{\alpha(\pi, x) : \pi \in \Gamma\}$
- $\mathcal{A}/\Gamma$*: množina všech orbit*
- $\mathrm{Fix}(\pi) = \{x \in \mathcal{A} : \alpha(\pi, x) = x\}$*: množina* pevných bodů $\pi$.

- $\mathrm{Stab}(x) = \{\pi \in \Gamma : \alpha(\pi, x) = x\}$: stabilizátor $x$.

**Tvrzení 2** (Burnsideovo lemma)**.** Pro akci konečné grupy $\Gamma$ na množině $\mathcal{A}$ platí

$$|\mathcal{A}/\Gamma| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} |\mathrm{Fix}(\pi)|$$

Pro $w : \mathcal{A}/\Gamma \to X$,

$$\sum_{o \in \mathcal{A}/\Gamma} w(o) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\pi)} w([x]).$$

## 1.1 Příklady

**Příklad 1** (Počet stromů/lesů/koster $K_n$)**.**
Nechť $s_n$ je počet zakořeněných stromů na označených vrcholech $1, \ldots, n$ (a uvažme, že $s_0 = 0$). Uvažme evf $S(x)$ posloupnosti $(s_0, s_1, \ldots)$ tedy $S(x) = \sum_{n \geq 0} s_n \frac{x^n}{n!}$.

(a) Rozmyslete si jak vypadá a co vyjadřuje evf $S^2(x)$. Pro porovnání rozhodněte co by jsme dostali, kdyby jsme se na naší posloupnost dívali jako na ovf.

(b) Zobecněte předchozí bod na vyšší mocniny a vyjádřete počet zakořeněných lesů jako nějakou evf $L(x)$ v závislosti na $S^k(x)$.

(c) Označme jako $l_n$ počet zakořeněných lesů na označených vrcholech. Dokažte $s_{n+1} = (n+1)l_n$. Pomocí toho odvoďte, že $L(x) = \frac{S(x)}{x}$.

(d) Pomocí předchozích dvou bodů dokažte, že $S(x) = xe^{S(x)}$.

(e) Podívejte se na inverzní funkci k $S(x)$ a pomocí ní najděte bod kde $S(x)$ přestává být definována a tedy i poloměr konvergence $S(x)$.

(f) Pomocí lemma o poloměru konvergence dokažte, že $\forall \varepsilon > 0 : \ s_n = O\left((e + \varepsilon)^n n!\right)$.

**Příklad 2.** Určete počet různých koláčků o poloměru 10cm, kde každá čtvrtina je naplněna buď tvarohem, mákem nebo povidly.

**Příklad 3.** Určete počet neizomorfních grafů na 4 vrcholech pomocí Burnsideovo lemmatu.

**Příklad 4.** Spočítejte generující funkci pro počty rozkladů $n$ na součet 5 přirozených čísel uspořádaných do cyklu, kdy rozklady lišící se otočením nebo zrcadlením se považují za stejné.