

# Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 11

Jan Soukup

26.4.2023

<https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG2/>

## 1 (Exponenciální) vytvořující funkce

### Definice 1.

Mocninná řada je řada tvaru  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ , kde  $a_i \in \mathbb{R}$  a  $x$  je reálná (nebo komplexní) proměnná.

Jako obyčejnou vytvořující funkci (ovf) posloupnosti  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  označíme mocninnou řadu  $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ .

Jako exponenciální vytvořující funkci (evf) posloupnosti  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  označíme mocninnou řadu  $A(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \dots$ .

**Definice 2.** Poloměr konvergence  $R$  mocninné řady  $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  je

$$R = \sup\{c > 0 : |a_n| \leq \left(\frac{1}{c}\right)^n \text{ až na konečně mnoho } n\}.$$

**Lemma 1.** Necht'  $A(x)$  je mocninná řada  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ , pak

- $A(x)$  diverguje pro  $x : |x| > R$ .
- $A(x)$  konverguje pro  $x : |x| < R$ .

**Důsledek 1.** Aplikování lemma a definice tedy vidíme, že  $|a_n| \leq \left(\frac{1}{R-\varepsilon}\right)^n$ .

Z komplexní analýzy vyplývá, že pokud máme vytvořující funkci  $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  s kladnými koeficienty s poloměrem konvergence  $0 < R < \infty$ , tak v bodě  $x = R$  bude  $A(x)$  divergovat, což bude odpovídat singularitě jí reprezentující funkce v bodě  $x = R$  (většinou tam ani nebude definována).

Poloměr konvergence tedy můžeme najít jako první kladné  $x$ , kde naše funkce přestane být definována.

**Tvrzení 2** (pro informaci - z minulého semestru). Buď  $(a_0, a_1, \dots)$  posloupnost reálných čísel. Necht' existuje  $K$  takové, že  $|a_n| \leq K^n$  pro všechna  $n$ . Potom pro každé  $x \in \left(-\frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right)$  řada  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  konverguje a hodnota jejího součtu definuje funkci  $a(x)$  proměnné  $x$  na uvedeném intervalu. Hodnotami  $a(x)$  na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy  $a_0, a_1, \dots$  jednoznačně určeny,  $a(x)$  má v 0 derivace všech řádů a platí

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

**Lemma 3** (Operace s vytvořujícími funkcemi).

**Obyčejné vytvořující funkce:**

Operace	koeficient u $x^n$	Význam
Součet $A(x) + B(x)$	$a_n + b_n$	(disjunktní) sjednocení
Součin $A(x)B(x)$	$\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$	kartézský součin
(*) $\frac{1}{1-A(x)}$	$\sum_{k \geq 0} [x^n] A^k(x)$	konečné posloupnosti

## Exponenciální vytvořující funkce:

Operace	koefficient u $x^n/n!$	Význam
Součet $A(x) + B(x)$	$a_n + b_n$	(disjunktní) sjednocení
Součin $A(x)B(x)$	$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$	proložená dvojice
(*) $e^{A(x)}$	$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} [x^n] A^k(x)$	vytvoření z komponent

## 1.1 Příklady

### Příklad 1.

- Rozmyslete/Připomeňte si, že počet způsobu vybrání (nezáleží na pořadí) 3 písmen ze slova MAMMA je rovna koefficientu u  $x^3$  v polynomu  $(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)$ , neboli násobení ovf  $(1, 1, 1, 1)$  a  $(1, 1, 1)$ .
- Rozmyslete si, že počet způsobu uspořádání (záleží na pořadí) 3 písmen ze slova MAMMA je rovna koefficientu u  $\frac{x^3}{3!}$  v polynomu  $(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+x+\frac{x^2}{2})$ , neboli násobení evf  $(1, 1, 1, 1)$  a  $(1, 1, 1)$ .
- Rozmyslete si, že to obdobně funguje i pro slova s více různými písmeny. Například máme 136 způsobů jak seřadit 3 písmena ze slova SEQUENCE.

### Příklad 2 (problém šatnářky pomocí evf).

Definujme  $s_n$  jako počet permutací bez pevného bodu na množině  $\{1, \dots, n\}$ . Nechť  $S(x)$  je evf této posloupnosti, tedy  $S(x) = \sum_{n \geq 0} s_n \frac{x^n}{n!}$ .

- Dokažte, že  $n! = \sum_k \binom{n}{k} s_{n-k}$ .
- Podívejte se na to jako na evf (vynásobte  $x^n$  a sečtěte pro všechna  $n$ ) a dokažte  $\frac{1}{1-x} = e^x S(x)$ .
- Vyjádřete  $s_n$  (hodí se vyjádřit  $\frac{1}{1-x}$  a  $e^{-x}$  jako posloupnosti).

### Příklad 3 (Počet stromů/lesů/koster $K_n$ ).

Nechť  $s_n$  je počet zakořeněných stromů na označených vrcholech  $1, \dots, n$  (a uvažme, že  $s_0 = 0$ ). Uvažme evf  $S(x)$  posloupnosti  $(s_0, s_1, \dots)$  tedy  $S(x) = \sum_{n \geq 0} s_n \frac{x^n}{n!}$ .

- Rozmyslete si jak vypadá a co vyjadřuje evf  $S^2(x)$ . Pro porovnání rozhodněte co by jsme dostali, kdyby jsme se na naši posloupnost dívali jako na ovf.
- Zobecněte předchozí bod na vyšší mocniny a vyjádřete počet zakořeněných lesů jako nějakou evf  $L(x)$  v závislosti na  $S^k(x)$ .
- Označme jako  $l_n$  počet zakořeněných lesů na označených vrcholech. Dokažte  $s_{n+1} = (n+1)l_n$ .
- Pomocí předchozích dvou bodů dokažte, že  $S(x) = xe^{S(x)}$ .
- Podívejte se na inverzní funkci k  $S(x)$  a pomocí ní najděte bod kde  $S(x)$  přestává být definována a tedy i poloměr konvergence  $S(x)$ .
- Pomocí lemma o poloměru konvergence dokažte, že  $\forall \varepsilon > 0 : s_n = O((e + \varepsilon)^n n!)$ .

**Příklad 4.** Nechť  $\mathcal{A}$  je množina řetězců z písmen **a**, **b** a **c** takových, že počet výskytů písmene **a** je sudý a písmeno **b** se vyskytuje nejvýše 4-krát, a  $a_n$  počet takových řetězců délky  $n$ . Najděte explicitní výraz pro exponenciální vytvořující funkci  $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$ . Jinak řečeno dopočtete  $a_n$ . Poznámka:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$