

Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 10

Jan Soukup

19.4.2023

<https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG2/>

1 Tutteův polynom

Definice 1. $k(E) = k(V, E) =$ počet komponent grafu (V, E)

- Rank $r(E) = |V| - k(V, E) =$ počet hran největší acyklické podmnožiny E (můžeme se na to dívat jako na "kostru" v nesouvislém grafu).
- Nulita $n(V) = |E| - r(V, E) =$ počet hran největší podmnožiny $F \subseteq E$, tž. $k(V, E \setminus F) = k(V, E)$ (tedy počet hran jejichž odebráním se nezvýší počet komponent).

Definice 2. Tutteův polynom grafu $G = (V, E)$ je

$$T_G(x, y) = \sum_{F \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(F)} \cdot (y-1)^{n(F)}.$$

Tvrzení 1.

$$T_G = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } E(G) = \emptyset \\ xT_{G-e} = xT_{G/e} & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je most} \\ yT_{G-e} = yT_{G/e} & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je smyčka} \\ T_{G-e} + T_{G/e} & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ není most ani smyčka} \end{cases}$$

Lemma 2. Jestliže $|V(G_1 \cap G_2)| \leq 1$, pak $T_{G_1 \cup G_2} = T_{G_1} \cdot T_{G_2}$.

Definice 3. Chromatický polynom $\chi_G(b) =$ počet obarvení G pomocí barev $\{1, \dots, b\}$.

1.1 Příklady

Příklad 1. Určete Tutteho polynom pro kružnici délky k .

Příklad 2. Ukažte, že pro souvislý graf G platí:

- $r(F) = r(G)$ pro $F \subseteq E(G)$ právě když $(V(G), F)$ je souvislý
- $n(F) = 0$ pro $F \subseteq E(G)$ právě když $(V(G), F)$ je les
- $T_G(1, 2) =$ počet souvislých podgrafů G s množinou vrcholů $V(G)$
- $T_G(2, 1) =$ počet acyklických podgrafů G s množinou vrcholů $V(G)$
- $T_G(2, 2) = 2^{|E(G)|}$

Příklad 3. Dokažte (z definice, bez použití vztahu k Tutteho polynomu), že

$$\chi_G(b) = \begin{cases} b^{|V(G)|} & \text{jestliže } E(G) = \emptyset \\ (b-1)\chi_{G/e}(b) & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je most} \\ 0 & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je smyčka} \\ \chi_{G-e} - \chi_{G/e} & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ není most ani smyčka} \end{cases}$$

Příklad 4. S použitím předchozího cvičení dokažte vztah

$$\chi_G(b) = (-1)^{r(G)} b^{k(G)} T_G(1-b, 0)$$

indukcí podle počtu hran grafu G .

Příklad 5. Nechť G je souvislý graf nakreslený v rovině a G^* je jeho duál. Ukažte, že $T_G(x, y) = T_{G^*}(y, x)$.

Příklad 6. Určete Tutteho polynom pro dva vrcholy spojené k hranami.