Kombonatorika a Grafy 2 - Cvičení 1

Jan Soukup

15.2.2023
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG2/

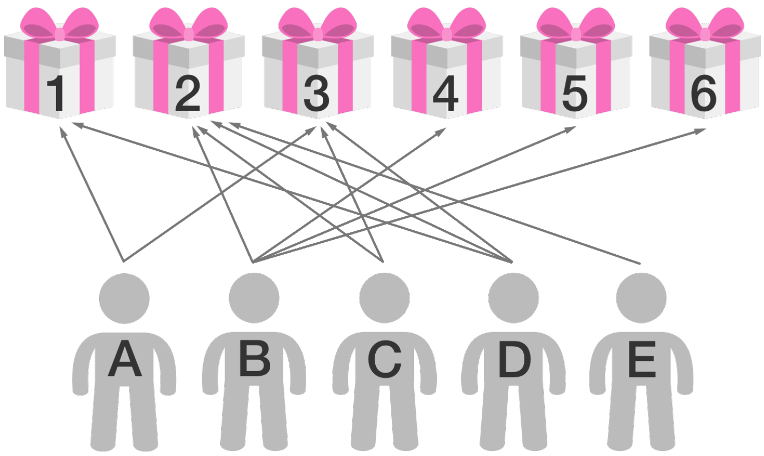
1 Opakování, párování

Párování v libovolném grafu G je každá množina hran, z nichž žádné dvě nemají společný vrchol. Řekneme, že párování pokrývá množinu vrcholů $W \subseteq V$, pokud každý vrchol z W je incidentní s některou hranou párování.

Tvrzení 1 (Hallova věta)**.** Nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf s částmi V_1 a V_2. Pak existuje párování pokrývající množinu vrcholů V_1, právě když každá množina vrcholů $W \subseteq V_1$ má aspoň $|W|$ sousedů.

Tvrzení 2 (König '31, Egerváry '31)**.** V bipartitním grafu je velikost nejmenšího vrcholového pokrytí rovna velikosti největšího párování.

Příklad 1. Ukažte, že následující bipartitní graf nemá párování, které pokryje (přiřadí dárek) všem lidem A-E.



Příklad 2. Pomocí toků si vzpomeňte jak najít největší párování v bipartitním grafu.

Také si připomeňte důkaz Kőnig–Egerváryho a Hallovy věty. (Hodí se vědět, že velikost maximální toku se rovná velikosti minimálního řezu)

Příklad 3. Mějme bipartitní graf $G = (A \cup B, E)$. Předpokládejme, že existuje párování M_A, které pokryje množinu $X_A \subseteq A$, a jiné párování M_B, které pokryje množinu $X_B \subseteq B$. Najděte párování, které pokryje množinu $X_A \cup X_B$.

Mějme nějaké párování v grafu. (ne)párovací hrana je hrana původního grafu (ne)patřící do aktuálního párování, volný vrchol je takový, který není spárován (všechny hrany s ním incidentní jsou nepárovací), střídavá cesta je cesta v grafu, na které se střídají párovací a nepárovací hrany, a nakonec zlepšující cesta (též volná střídavá cesta) je střídavá cesta začínající a končící volným vrcholem (a tedy nutně i nepárovací hranou).

Příklad 4 (bude na přednášce)**.** Dokažte, že párování je největší právě tehdy, když neexistuje volná střídavá cesta.

Příklad 5. Jak najít největší párování v bipartitním grafu bez použití algoritmu na toky? Použijte předchozí příklad.

Příklad 6. Dostali jsme dva čtverce papíru o obsahu přesně 2023, oba rozdělené na 2023 mnohoúhelníků o jednotkovém obsahu Rozdělení na mnohoúhelníky může být na každém papíře různé. Položíme papíry na sebe a chceme je propíchnout 2023 krát tak, abychom propíchli vnitřek každého mnohoúhelníku na obou papírech (4046 propíchnutí by bylo triviální, stačilo by vzít propíchat každý papír zvlášť).

Příklad 7. Mějme bipartitní graf $G = (A \cup B, E)$ a předpokládejme, že pro všechna $S \subseteq A : |N(S)| \geq 2|S|$. Ukažte, že můžeme vybrat podmnožinu hran M takovou, že každý vrchol z A je v právě dvou hranách z M a každý vrchol z B je nejvýše v jedné hraně z M.