Kombonatorika a Grafy 2 - Cvičení 13

Jan Soukup

17.5.2023
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG2/

1 Burnsideovo lemma a extremální kombinatorika

Definice 1.

- Akce α *grupy* Γ *na množině* $\mathcal{A}$ *je funkce* $\Gamma \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *tž.*
  - $\alpha(\mathrm{id}, x) = x$
  - $\alpha(\pi_1 \circ \pi_2, x) = \alpha(\pi_1, \alpha(\pi_2, x))$.
- Orbita $[x]$ *prvku* $x \in \mathcal{A}$*:* $\{\alpha(\pi, x) : \pi \in \Gamma\}$
- $\mathcal{A}/\Gamma$*: množina všech orbit*
- $\mathrm{Fix}(\pi) = \{x \in \mathcal{A} : \alpha(\pi, x) = x\}$*: množina* pevných bodů π.
- $\mathrm{Stab}(x) = \{\pi \in \Gamma : \alpha(\pi, x) = x\}$*:* stabilizátor x.

Tvrzení 1 (Burnsideovo lemma)**.** Pro akci konečné grupy Γ na množině $\mathcal{A}$ platí

$$|\mathcal{A}/\Gamma| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} |\mathrm{Fix}(\pi)|$$

Pro $w : \mathcal{A}/\Gamma \to X$,

$$\sum_{o \in \mathcal{A}/\Gamma} w(o) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\pi)} w([x]).$$

$$\mathrm{ex}(H, n) = \max\{|E(G)| : |V(G)| = n, H \nsubseteq G\}$$

Turánův graf $T_k(n)$: Úplný k-partitní graf s n vrcholy, každá část má velikost $\lfloor n/k \rfloor$ nebo $\lceil n/k \rceil$.

$$t_k(n) = \big|E(T_k(n))\big|$$

Tvrzení 2 (Turán)**.**

$$\mathrm{ex}(K_{k+1}, n) = t_k(n)$$

Systém $\mathcal{A}$ množin je *protínající*, jestliže $A \cap B \neq \emptyset$ pro každé $A, B \in \mathcal{A}$.

Tvrzení 3 (Erdős-Ko-Rado)**.** Jestliže $n \geq 2k$, pak protínající se systém k-prvkových podmnožin $[n]$ má velikost maximálně $\binom{n-1}{k-1}$.

1.1 Příklady

Příklad 1. Určete počet neizomorfních grafů na 4 vrcholech pomocí Burnsideovo lemmatu.

Příklad 2. Pišme $G(x) = \sum_{n=0}^{6} g_n x^n$, kde g_n je počet neizomorfních grafů na 4 vrcholech s n hranami. S pomocí vážené varianty Burnsideova lemmatu vyjádřete $G(x)$.

Příklad 3. Spočítejte generující funkci pro počty rozkladů n na součet 5 přirozených čísel uspořádaných do cyklu, kdy rozklady lišící se otočením nebo zrcadlením se považují za stejné.

Příklad 4. Nechť F je systém podmnožin množiny $\{1, n\}$, ve kterém se každé dvě podmnožiny protínají. Nalezněte optimální horní odhad na velikost F.

Příklad 5. Dokažte, že místo podmnožin velikosti k v Erdős-Ko-Rado můžeme uvažovat nezávislé podmnožiny velikosti maximálně k. Neboli dokažte následující:

Jestliže $n \geq 2k$, pak protínající se systém podmnožin $[n]$ velikosti maximálně k takových, že žádná není podmnožinou jiné, má velikost maximálně $\binom{n-1}{k-1}$.

Příklad 6. Nechť $V_1, \cdots, V_s$ jsou disjunktní $(k-1)$-prvkové množiny a nechť F je systém s-prvkových množin S_j, t.ž., $|S_j \cap V_i| = 1$ pro každé i, j. Kolik množin tvoří F? Ukažte, že F nemá slunečnici s k lístky.

(Slunečnice je kolekce množin takových že pro ně existuje množina S a všechny množiny z kolekce mají průnik právě S.)