Kombonatorika a Grafy 1 - Cvičení 9

Jan Soukup

28.11.-29.11.2022
`https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG/`

1 souvislost a další aplikace toků

Věta 1 (Hallova věta). Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje právě tehdy, když pro každou $J \subseteq I$ je $\left|\bigcup_{j\in J} M_j\right| \geq |J|$; tato podmínka se nazývá Hallova.

Nechť $G = (V, E)$ je graf. G je souvislý, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. Hranový řez G je množina $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. Vrcholový řez G je množina $C \subseteq V$ taková, že graf $G - C$ je nesouvislý.

Hranová souvislost G (značíme $k_e(G)$) je velikost nejmenšího hranového řezu G. Vrcholová souvislost G ($k_v(G)$) je $k - 1$, pokud $G = K_k$ a $k > 1$, 1 pokud $G = K_1$, a velikost nejmenšího vrcholového řezu G jinak. Graf je vrcholově (resp. hranově) k-souvislý, pokud $k_v(G) \geq k$ resp. $k_e(G) \geq k$.

Víme, že $k_e(G) - 1 \leq k_e(G - e) \leq k_e(G)$ a $k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e) \leq k_v(G)$.

Dále víme:

Věta 2 (Fordova–Fulkersonova věta). $k_e(G) \geq t$ právě když mezi každými dvěma vrcholy existuje alespoň t hranově disjunktních cest.

Věta 3 (Mengerova věta). Pokud $G \neq K_1$ tak $k_v(G) \geq t$ právě když mezi každými dvěma vrcholy existuje alespoň t vrcholově disjunktních cest (koncově body jsou společné).

Příklad 1. Najděte příklad grafu G, ve kterém lze odebrat vrchol tak, že

- hranová souvislost G klesne (vzroste) o libovolně velké předem dané číslo.
- vrcholová souvislost G vzroste o libovolně velké předem dané číslo. O kolik může vrcholová souvislost klesnout po odebrání vrcholu?

Příklad 2. Pro libovolnou dvojici přirozených $l \leq k$ nalezněte graf G, pro který je $k_e(G) = k$ a $k_v(G) = l$. Neboli, takový graf, jehož hranová souvislost je k a jehož vrcholová souvislost je l.

Příklad 3. Nechť $G = (V, E)$ je vrcholově k- souvislý. Dokažte, že přidáním nového vrcholu stupně alespoň k dostaneme zase vrcholově k-souvislý graf.

Příklad 4. Nechť $G = (V, E)$ je vrcholově k- souvislý. Dokažte, že pro každý vrchol $x \in V$ a každou množinu $A \subseteq V$ takovou, že $|A| = k$ a $x \notin A$ existuje k cest z x do vrcholů A takových, že každé dvě z nich sdílejí pouze x.

Příklad 5. Ukažte, že pro každé $k \geq 2$ je každý k-regulární souvislý bipartitiní graf vrcholově 2-souvislý. Platí to i když pokud graf nebude bipartitní?

Příklad 6. Ukažte, že graf je 2-souvislý právě když pro každé tři různé vrcholy x, y, z platí, že existuje cesta z x do z přes y.

Příklad 7. Rozhodněte, jestli každý souvislý graf se sudými stupni a alespoň jednou hranou nutně vrcholově (hranově) 2-souvislý.

Příklad 8 (z minula)**.** Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M} = (M_i \colon i \in I)$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.

Příklad 9 (z minula)**.** Dokažte, že Hallova věta implikuje Kőnigovu–Egerváryho větu (tedy, že velikost největšího párování se v bipartitním grafu rovná velikosti nejmenšího vrcholového pokrytí).