Kombonatorika a Grafy 1 - Cvičení 8

Jan Soukup

21.11.-22.11.2022
`https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG/`

1 Hallova věta a další aplikace toků

Nechť X a I jsou konečné množiny. *Množinovým systémem na* X nazveme $|I|$-tici $\mathcal{M} = (M_i \colon i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. *Systém různých reprezentantů* (SRR) je prostá funkce $f \colon I \to X$ taková, že pro každé $i \in I$ je $f(i) \in M_i$. Víme, že existence SRR v $\mathcal{M}$ je ekvivalentní s existencí párování velikosti $|I|$ v *incidenčním grafu* $G_{\mathcal{M}} = (I \cup X, \{\{i, x\} \colon i \in I, x \in X, x \in M_i\})$.

Tvrzení 1 (Hallova věta)**.** Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje právě tehdy, když pro každou $J \subseteq I$ je $\left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| \geq |J|$; tato podmínka se nazývá Hallova.

Příklad 1. Nechť a, b, c, d, e jsou různá přirozená čísla.

(a) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami množiny $\{a, b, c, d\}$ systém různých reprezentantů?

(b) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami množiny $\{a, b, c, d, e\}$ systém různých reprezentantů?

Příklad 2 (bylo na přednášce)**.** Ukažte, že každý k-regulární (všechny vrcholy mají stupeň k) bipartitní graf má perfektní párování.

Příklad 3. Na zkoušku přijde 100 studentů a 25 zkoušejících. Každý student má oblíbených aspoň 10 z přítomných zkoušejících. Každý student má být zkoušen právě jedním zkoušejícím.

Dokažte, že existuje rozvrh zkoušení, kde každý student bude zkoušen jedním ze svých oblíbených zkoušejících a každý zkoušející bude zkoušet maximálně 10 studentů.

Příklad 4. Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M} = (M_i \colon i \in I)$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.

Příklad 5. Santa má aspoň n dárků pro n dětí. Pro každé i existuje číslo $x_i \in \mathbb{N}$ a podmnožina dárků velikosti x_i taková, že i-té dítě bude nadšené pokud dostane dárek z této podmnožiny. Navíc,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Dokažte, Santa může každému dítěti dát jeden dárek, tak aby všechny děti byli nadšené.

Příklad 6 (*)**.** Dokažte, že Hallova věta implikuje Kőnigovu–Egerváryho větu (tedy, že velikost největšího párování se v bipartitním grafu rovná velikosti nejmenšího vrcholového pokrytí).

Příklad 7. Dokažte, že Kőnigovu–Egerváryho věta implikuje Hallovu větu.