Kombonatorika a Grafy 1 - Cvičení 6

Jan Soukup

7.11.-8.11.2022
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG/

1 Konečné projektivní roviny

Definice 1. *Nechť X je konečná množina a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$. Potom dvojici $(X, \mathcal{P})$ nazveme konečnou projektivní rovinou, pokud splňuje následující axiomy:*

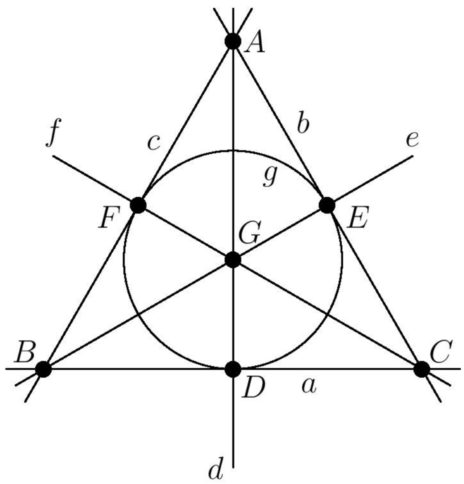
(A1) $\forall\, x, y \in X, x \neq y\ \exists!\ P \in \mathcal{P} : x, y \in P$ (každými dvěma body prochází právě jedna přímka).

(A2) $\forall\, P, Q \in \mathcal{P}, P \neq Q : |P \cap Q| = 1$ (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).

(A3) $\exists\, C \subseteq X, |C| = 4\ \forall\, P \in \mathcal{P} : |C \cap P| \leq 2$ (existují 4 body v obecné poloze).

Definice 2. *Řád projektivní roviny $(X, \mathcal{P})$ se rovná počtu bodů na přímce minus jedna (víme, že všechny přímky obsahují stejný počet bodů). Víme také, že konečná projektivní rovina řádu n obsahuje $n^2 + n + 1$ přímek a bodů a také že každý bod leží na právě $n + 1$ přímkách.*

Příkladem konečné projektivní roviny řádu 2 je *Fanova rovina*:



Příklad 1. Nechť X je konečná množina a $\mathcal{P}$ systém jejích podmnožin, splňující podmínky (A1), (A2) a následující (A3'):

(A3') Existují aspoň 2 různé přímky $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, z nichž každá má aspoň 3 body.

Dokažte, že potom $(X, \mathcal{P})$ je konečná projektivní rovina.

Příklad 2. Bez použití duality dokažte, že každá konečná projektivní rovina řádu n obsahuje $n^2 + n + 1$ přímek. Hint: počítání dvěma způsoby.

Příklad 3. V Transylvánské loterii se náhodně losují tři různá čísla z čísel 1 až 14. Hráč si před slosováním zakoupenín jednoho lístku může vybrat tři čísla, přičemž vyhraje, pokud jsou mezi vylosovanými čísly aspoň dvě jím vybraná čísla. Kolik lístků si stačí koupit, abyste měli zaručenou výhru?

Příklad 4. Ukažte, že existuje graf s N vrcholy a s aspoň $\Omega(N^{3/2})$ hranami, který neobsahuje $K_{2,2}$ jako podgraf.

2 Latinské čtverce

Definice 3. *Latinský čtverec řádu* n *je tabulka o rozměrech* $n \times n$ *nad prvky z* $\{1, 2, \ldots, n\}$*, kde se každé číslo v každém sloupci a řádku vyskytuje právě jednou. Dva latinské čtverce* L *a* L' *jsou* ortogonální*, pokud pro každou uspořádanou dvojici čísel* (a, b) *z* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *existuje* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *takové, že* $(a, b) = ((L)_{ij}, (L')_{ij})$*. Množina* $\{L_1, L_2, \ldots, L_t\}$ *Latinských čtverců je množinou* navzájem ortogonálních Latinských čtverců*, pokud každé dva čtverce z této množiny jsou ortogonální.*

Tři navzájem ortogonální latinské čtverce řádu 4:

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 4 \\
2 & 1 & 4 & 3 \\
3 & 4 & 1 & 2 \\
4 & 3 & 2 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 2 & 1 \\
2 & 1 & 4 & 3 \\
3 & 4 & 1 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 4 \\
3 & 4 & 1 & 2 \\
4 & 3 & 2 & 1 \\
2 & 1 & 4 & 3
\end{array}.
$$

Příklad 5. Rozhodněte, zda permutace řádků a sloupců zachovávají vlastnost být latinským čtvercem a zda tyto operace zachovávájí ortogonalitu.