Kombonatorika a Grafy 1 - Cvičení 4

Jan Soukup

24-25.10.2022
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG/

1 Vytvořující funkce

Vytvořující (generující) funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$.

Tvrzení 1 (Zobecněná binomická věta)**.** Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots,$$

kde $\binom{r}{0} = 1$ a $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$ pro $k \in \mathbb{N}$.

Jako důsledek víme, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{n-1} x^i.$$

Tvrzení 2 (Rozklad na parciální zlomky)**.** Uvažujme podíl polynomů $\frac{p(x)}{q(x)}$, kde búno (jinak to můžeme snadno částečně vydělit) q má vyšší stupeň než p a má rozklad

$$q(x) = (x-a_1)^{n_1} \dots (x-a_N)^{n_N} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{m_1} \dots (x^2 + \alpha_M x + \beta_M)^{m_M}.$$

Pak můžeme zmíněný podíl rozložit na součet tzv. *parciálních zlomků*, kde za každý člen $(x-a_i)^{n_i}$ v rozkladu q budou členy $\frac{A_{i,1}}{x-a_i} + \dots + \frac{A_{i,n_i}}{(x-a_i)^{n_i}}$ a za každý člen $(x^2+\alpha_i x+\beta_i)^{m_i}$ budou členy $\frac{B_{i,1}x+C_{i,1}}{x^2+\alpha_i x+\beta_i} + \dots + \frac{B_{i,m_i}x+C_{i,m_i}}{(x^2+\alpha_i x+\beta_i)^{m_i}}$. Koeficienty A, B, C se dají jednoznačně určit pomocí řešení systému lineárních rovnic, který vyplývá z rozkladu.

Příklad 1 (z minula)**.** Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 9$ a $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ pro $n \geq 0$.

Příklad 2. Určete koeficient

(a) u x^{12} v $x^6 \cdot \frac{x+1}{(1-x)^2}$.

(b) u x^{15} ve výrazu $(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4$,

(c) u x^{28} ve výrazu $(x + x^3 + x^5 + \cdots)^6$,

(d) u x^{10} v $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$

Příklad 3. Najděte explicitní vzorce rekurencí:

(a) $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ a $b_{n+2} = -b_n + 2b_{n+1}$ pro $n \geq 0$,

(b) $b_0 = 1$, $b_1 = 1$ a $b_{n+2} = 5b_n - 6b_{n+1}$ pro $n \geq 0$,

(c) $c_0 = 1$ a $c_{n+1} = 7c_n + 6^{n+1}$ pro $n \geq 0$.

Příklad 4 (*). Uvažme náhodnou procházku v $\mathbb{Z}$ začínající v počátku, kde se v každém kroku $n = 1, 2, \dots$ rozhodneme náhodně uniformně nezávisle, zda budeme pokračovat doleva či doprava.

(a) Pro $n \in \mathbb{N}$ si připomeňte, že pravděpodobnost u_{2n} jevu, že se po $2n$ krocích se vrátíme do počátku je $\binom{2m}{m}/2^{2m}$.

(b) Určete vytvořující funkci $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}x^n$. Může se hodit (dokažte podobně jako na přednášce), že
$$\binom{-1/2}{n}(-1)^n = 2^{-2n}\binom{2n}{n}.$$

(c) Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ je f_{2n} pravděpodobnost jevu, že se po $2n$ krocích se vrátíme *poprvé* do počátku. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $f_0 = 0$ a $u_0 = 1$ platí
$$u_{2n} = f_0u_{2n} + f_2u_{2n-2} + \cdots + f_{2n}u_0.$$

(d) Za použití výsledků z předešlých částí určete vytvořující funkci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}x^n$ a její koeficienty f_{2n} (a tedy i pravděpodobnosti, že se poprvé vrátíme do počátku po $2n$ krocích). Může se hodit podívat na součin $u(x)f(x)$.

(e) Ukažte, že suma $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}$ konverguje a za použití tohoto faktu ukažte, že pravděpodobnost návratu do počátku se rovná jedné.

Základní operace s mocninnými řadami:		
operace	výsledek	n-tý člen
$a(x) + b(x)$	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$	$a_n + b_n$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$	αa_n
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots, \alpha^i a_i, \dots)$	$\alpha^n a_n$
$x^k a(x)$	$(0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots)$ (k nul na začátku)	a_{n-k}
$a(x^k)$	$(a_0, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots)$ (střídavě $k-1$ nul)	a_{kn}
$\frac{a(x)-a_0-\cdots-a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}$	$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$	a_{n+k}
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, ia_i, \dots)$	$(n+1)a_{n+1}$
$\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots, \frac{a_i}{i+1}, \dots)$	$\frac{a_{n-1}}{n}$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \dots)$, kde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$	$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$