Kombonatorika a Grafy 1 - Cvičení 2

Jan Soukup

10-11.10.2022
`https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG/`

1 Opakování

Definice 1. *Kombinačním číslem* $\binom{n}{k}$*, pro* $n \geq k \geq 0$*, rozumíme počet různých možností jak vybrat neuspořádanou* k*-tici z* n *objektů. Ekvivalentně,* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1.1 Značení

- $f(x) = O(g(x))$: $\exists x_0 \in \mathbb{R}^+ \ \exists M \in \mathbb{R}^+$ tž. $\forall x \geq x_0 : 0 \leq f(x) \leq M \cdot g(x)$
- $f(x) = \Omega(g(x))$: $\exists x_0 \in \mathbb{R}^+ \ \exists M \in \mathbb{R}^+$ tž. $\forall x \geq x_0 : 0 \leq M \cdot g(x) \leq f(x)$
- $f(x) = \Theta(g(x))$: $f(x) = O(g(x))$ a $g(x) = O(f(x))$
- $f(x) = o(g(x))$: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f(x) \sim g(x)$: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

1.2 Faktoriál

- Hrubý odhad: $n^{n/2} \leq n! \leq (\frac{n+1}{2})^n \leq n^n$
- Lepší odhad: $e(\frac{n}{e})^n \leq n! \leq en(\frac{n}{e})^n$
- Stirlingův odhad: $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

1.3 Kombinační čísla

- Odhady pro obecné kombinační číslo: $(\frac{n}{k})^k \leq \binom{n}{k} \leq n^k$
- Hrubý odhad pro největší binomický koeficient: $\frac{2^{2n}}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$
- Lepší odhad pro největší binomický koeficient: $\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$
- Stirlingův odhad pro největší binomický koeficient: $\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$

2 Příklady

Příklad 1. Dokažte (například kombinatorickou úvahou)

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

Příklad 2. Uvažme náhodnou procházku v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ začínající v počátku, kde se v každém kroku rozhodneme náhodně uniformně nezávisle, zda budeme pokračovat doleva, doprava, nahoru, či dolů. Nechť je u_m počet takových cest délky $2m$, končících v počátku.

(1) Najděte vzorec pro u_m. (Pravděpodobně vám vyjde suma nějakých kombinačních čísel).

(2) Pomocí prvního příkladu dokažte $u_m = \binom{2m}{m}^2$.

(3) Podobně jako na hodině z toho dokažte, že střední hodnota počtu návratů do počátku v případě nekonečné cesty roste do nekonečna.

(4) Teď dokažte třetí bod ještě jednou jinak, jen pomocí analýzi jednorozměrného případu.
(hint: Snažte se 2D cestu "rozložit"na dvě 1D cesty. Uvažte místo cesty se směry doleva, doprava, dolu, nahoru cestu se směry doleva nahoru, doprava dolu, doleva dolu, doprava nahoru)

Příklad 3. Srovnejte následují výrazy podle velikosti (za předpokladu, že n je velké).

$$\binom{2n}{n}, \binom{2n}{5}, \binom{2n}{n+1}, n!, n^n, \left(\sqrt{n}\right)^n, n^{\sqrt{n}}, n^5$$

Příklad 4. Rozhodněte, zda platí:

(a) $n! = 2^{O(n)}$

(b) $n^{\log_2 n} = 2^{\Omega(n)}$

(c) $\sum_{i=1}^{n} i^8 = \Theta(n^9)$