

Kombinatorika a Grafy 1 - Cvičení 13

Jan Soukup

2.1.-3.1.2023

<https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG/>

1 Samoopravné kódy

Abeceda Σ je konečná množina q symbolů. Slovo délky n je uspořádání n -tice symbolů. Jako Σ^n označíme množinu slov délky n . Hammingova vzdálenost slov $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \Sigma^n$ je definována jako $d(x, y) = |\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq y_i\}|$. (Blokový) kód je množina $C \subseteq \Sigma^n$ takzvaných *kodových slov*. Řekneme, že s kódem C je možné *opravit nanejvýš t chyb*, pokud pro každé $y \in \Sigma^n$ existuje nanejvýš jedno $x \in C$ takové že $d(x, y) \leq t$. Parametry kódu C jsou $(n, k, d)_q$, kde $k = \log_q |C|$ a $d = \min_{x \neq y \in C} \{d(x, y)\}$.

Lineární kód C je podprostorem vektorového prostoru \mathbb{F}_q^n , kde $\Sigma = \mathbb{F}_q$ je konečné těleso velikost q (jinými slovy obsahuje "nulové" slovo a je uzavřený na "sčítání a odečítání" slov mezi sebou).

Příklad 1. Určete parametry následujících kódů

- $\{00000, 00111, 11011, 11100\}$
- $\{111, 100, 001, 010\}$
- $\{00000, 01111, 10100, 11011\}$

Příklad 2. Dokažte, že Hammingova vzdálenost je nad Σ^n metrikou.

Příklad 3. Nechť C je kód s parametry $(n, k, 2t+1)_2$ nad abecedou $\{0, 1\}$. Rozhodněte, jaké jsou parametry C' , který z C vznikne prodloužením každého kódového slova o jeden symbol určující paritu počtu jedniček v daném slově.

Příklad 4. Uvažme kód obsahující všechna slova délky $n \geq 2$ nad $\{0, 1\}$ sudé váhy, neboli $C = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_2^n : \sum_{i=1}^n x_i \equiv 0 \pmod{2}\}$. Určete parametry tohoto kódu, ověřte, že je lineární.

Příklad 5. Mějme 5-znakovou abecedu (třeba $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4\}$). Chceme kódovat všechny dvojice symbolů. Chceme 25 slov takových, že začínají všemi kombinacemi prvních dvou symbolů. Navrhněte kód délky 5, s tou vlastností, že z každé dvojice pozic lze rekonstruovat celé slovo. Určete parametry kódu.

Příklad 6. Mějme 3-znakovou abecedu (třeba $\Sigma = \{0, 1, 2\}$).

- Ukažte, že pokud kód $C \subseteq \Sigma^4$ opravuje jednu chybu (jednu jakkoliv změněnou pozici), potom obsahuje nejvýše 9 slov
- Navrhněte kód $C \subseteq \Sigma^4$ rozpoznávající jednu chybu (tedy potřebujeme aby minimální vzdálenost byla alespoň 2) s alespoň 20-ti kódovými slovy