Kombonatorika a Grafy 1 - Cvičení 12

Jan Soukup

19.12.-20.12.2022
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG/

1 Ramsayova věta

Definice 1. *Definujme* Ramseyovo číslo $R(k, l)$ *jako nejmenší* $N \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé obarvení hran grafu* K_N *červenou a modrou barvou existuje červené* K_k*, nebo modré* K_l *jako podgraf* K_N*.*

Ramseyovo číslo $R(n_1, \ldots, n_r)$ *definujeme podobně pro obarvení hran* K_N r *barvami.*

Věta 1. Pro každé k, l je číslo $R(k, l)$ konečné. Dokonce $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Věta 2. Pro každé $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ je číslo $R(n_1, \ldots, n_r)$ konečné.

Místo dvojic (hran) můžeme obarvovat p-tice a věta bude pořád platit:

Definice 2. *Definujeme* ramseyovo číslo $R_p(n_1, \ldots, n_r)$ *jako nejmenší* $N \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* r*-obarvení* $\binom{[N]}{p}$ *existuje* $i \in \{1, \ldots, r\}$ *a* $Y \subseteq [N]$ *velikosti* n_i *takové, že všechny prvky* $\binom{Y}{p}$ *jsou obarveny* i*-tou barvou.*

Věta 3. Pro každé $p, r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ je číslo $R_p(n_1, \ldots, n_r)$ konečné.

Ramseyova věta platí dokonce i v následující nekonečné verzi.

Věta 4. Pro každé $p, k \in \mathbb{N}$ a pro každé r-obarvení množiny $\binom{\mathbb{N}}{p}$ existuje nekonečná $X \subseteq \mathbb{N}$ taková, že všechny její p-tice mají v daném r-obarvení stejnou barvu.

Příklad 1. Dokažte Erdősovu–Szekeresovu větu pro dimenzi 3. Neboli ukažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje přirozené $N = N(k)$ takové, že každá množina N bodů z $\mathbb{R}^3$ v obecné poloze (žádné 4 body neleží na společné rovině) obsahuje k bodů, které jsou vrcholy konvexního mnohostěnu.

Můžete přímo využít Erdősovu–Szekeresovu větu v dimenzi 2. Nebo kopírovat její důkaz.

Příklad 2. Mějme nekonečnou množinu bodů S v rovině. Dokažte, že existuje nekonečná podmnožina S obsahující pouze body ležící na přímce, nebo pouze body v obecné poloze (žádné tři neleží na přímce).

Příklad 3. Δ-systém je množina $\mathcal{M}$ množin taková, že každé dvě různé množiny z $\mathcal{M}$ mají stejný průnik (tedy $\exists K : \forall M_1 \neq M_2 \in \mathcal{M} : M_1 \cap M_2 = K$). Nechť k je kladné celé číslo a nechť $\mathcal{A}$ je nekonečná množina množin kardinality k. Dokažte, že $\mathcal{A}$ obsahuje nekonečný Δ-systém jako podmnožinu.

Nápověda: Dokažte nejdříve, že existuje nekonečná množina $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ taková, že každé dvě množiny z $\mathcal{B}$ mají průnik stejné kardinality.

Příklad 4 (z minula)**.** Každý bod v rovině je buď červený, nebo modrý. Dokažte, že existuje obdélník, jehož vrcholy jsou téže barvy.

Příklad 5. Mřížové body v rovině jsou obarveny 2015 barvami (Mřížové body jsou body, které mají obě souřadnice celočíselné). Ukažte, že lze zvolit 2014 řádků a 2016 sloupců tak, že všechny jejich průsečíky mají stejnou barvu.

Příklad 6 (*)**.** Najděte 2-obarvení nekonečných podmnožin $\mathbb{N}$ takové, že žádná nekonečná podmnožina $\mathbb{N}$ neobsahuje pouze nekonečné podmnožiny jedné barvy. (Jinými slovy Ramseyova věta nejde tímto způsobem rozšířit na nekonečné "p"ani pro dvě barvy).