

Kombinatorika a Grafy 1 - Cvičení 11

Jan Soukup

12.12.-13.12.2022

<https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG/>

1 Ramseyova věta

Definice 1 (Dirichletův princip (případně princip holubníku)). *Nechť máme alespoň $(n + 1)$ holubů v holubníku o n příhrádkách. Pak v některé příhradce jsou alespoň dva holubi.*

Trochu obecněji: Nechť máme alespoň $(mn + 1)$ holubů v holubníku o n příhrádkách. Pak v některé příhradce je alespoň $(m + 1)$ holubů.

Definice 2. *Definujme Ramseyovo číslo $R(k, l)$ jako nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé obarvení hran grafu K_N červenou a modrou barvou existuje červené K_k , nebo modré K_l jako podgraf K_N .*

Věta 1. Pro každé k, l je číslo $R(k, l)$ konečné. Dokonce $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Z přednášky také víme, že $R(3, 3) = 6$ a $R(k, k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$ pro každé $k, l \in \mathbb{N}$.

Označíme-li pro grafy H_1, H_2 jako $R(H_1, H_2)$ nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé 2-obarvení hran grafu K_N existuje $i \in \{1, 2\}$ takové, že dané 2-obarvení obsahuje H_i jako podgraf se všemi hranami obarvenými i -tou barvou, pak z Ramseyovy věty dostáváme $R(H_1, H_2) \leq R(|V(H_1)|, |V(H_2)|)$. Tedy i tato Ramseyovská čísla obecných grafů jsou vždy konečná.

Příklad 1. Dokažte, že pro každé obarvení všech přirozených čísel (bez nuly) dvěma barvami najdeme $x, y \in \mathbb{N}$ takové, že $x \neq y$ a navíc x, y a $x + y$ mají stejnou barvu.

Příklad 2. Dokažte, že pro každé $k, \ell \in \mathbb{N}$, existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že každá posloupnost přirozených čísel obsahuje neklesající podposloupnost délky k nebo nerostoucí podposloupnost délky ℓ .

(*) Dokažte, že dokonce stačí volit $N = (k - 1)(\ell - 1) + 1$.

Příklad 3. Určete nejmenší N takové, že v každém červeno-modrém obarvení hran K_N najdeme buď modrou kopii $K_{1,3}$ nebo červenou kopii K_3 . Neboli určete $R(K_3, K_{1,3})$.

Příklad 4. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- Obarvíme-li dostatečně velký úplný graf se smyčkami dvěma barvami (barvíme hrany a smyčky), vždy existuje jednobarevný úplný podgraf se smyčkami na n vrcholech.
- Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo doplněk G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf.
- Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo G obsahuje doplněk $K_{n,n}$ jako podgraf.
- Pro každý graf G existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že v libovolném 2-obarvení hran K_N najdeme jednobarevnou G jako indukovaný podgraf.

Příklad 5.

- (a) Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo $M(n)$ takové, že každá $\{0, 1\}$ -matice s rozměry $M(n) \times M(n)$ obsahuje $n \times n$ podmatici, která obsahuje buď jen nuly nebo jen jedničky.
- (b) Sestrojte libovolně velkou $\{0, 1\}$ -matici, která neobsahuje 2×2 matici se samými jedničkami a ani 2×2 matici se samými nulami jako *diagonální podmatici*. Matice A o rozměrech $n \times n$ je diagonální podmaticí matice B o rozměrech $N \times N$, pokud existuje $R \subseteq \{1, \dots, N\}$, $|R| = n$, taková, že vybráním řádků a sloupců matice B s indexy z R získáme matici A .
- (c) Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo $DM(n)$ takové, že každá $\{0, 1\}$ -matice s rozměry $DM(n) \times DM(n)$ obsahuje $n \times n$ diagonální podmatici, která má všechny prvky na diagonále totožné, všechny prvky nad diagonálou totožné a také všechny prvky pod diagonálou totožné.

Příklad 6. Každý bod v rovině je buď červený, nebo modrý. Dokažte, že existuje obdélník, jehož vrcholy jsou téže barvy.