

# Kombinatorika a Grafy 1 - Cvičení 10

Jan Soukup

5.12.-6.12.2022

<https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG/>

## 1 Počty koster a počítání dvěma způsoby

*Kostra* v grafu  $G = (V, E)$  je stromem  $T = (V, E')$  s  $E' \subseteq E$ . Neboli  $T$  je souvislým podgrafem grafu  $G$  na stejné množině vrcholů a  $T$  navíc neobsahuje cyklus. Graf má kostru právě tehdy, když je souvislý. Pro graf  $G$  označme jako  $\kappa(G)$  počet koster grafu  $G$ .

**Věta 1.** Pro každé celé číslo  $n \geq 2$  je počet koster úplného grafu  $K_n$  na  $n$  vrcholech roven  $n^{n-2}$ . Neboli  $\kappa(K_n) = n^{n-2}$ .

*Laplacián* grafu  $G = (\{1, \dots, n\}, E)$  je  $n \times n$  matice  $L(G) = (L_{i,j})_{i,j=1}^n$ , kde

$$L_{i,j} = \begin{cases} \deg_G(i), & \text{pokud } i = j, \\ -1, & \text{pokud } \{i, j\} \in E, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

**Věta 2.** Pro každý graf  $G = (\{1, \dots, n\}, E)$  platí  $\kappa(G) = \det(L(G)^{1,1})$ , kde  $L(G)^{1,1}$  značí matici  $L(G)$  bez prvního řádku a bez prvního sloupce.

Z přednášky také víme, že počet koster úplného grafu  $K_n$  bez jedné hrany je roven  $(n-2)n^{n-3}$  a počet koster úplného grafu  $K_n$  obsahujících pevně zvolenou hranu je  $2n^{n-3}$ .

**Příklad 1.** Spočítejte počet koster v následujících grafech:

- $K_n \div e$ , tedy grafu  $K_n$  s jednou podrozdělenou hranou  $e$ ,
- $K_n \div E$ , tedy grafu  $K_n$  se všemi hranami podrozdělenými,
- $C_m \oplus_e C_n$ , tedy dvou cyklů slepených společnou hranou  $e$ ,
- $C_m \oplus_e K_n$ .

**Příklad 2.** Spočítejte počet koster úplného grafu  $K_n$  za použití věty o determinantu Laplaciánu.

**Příklad 3.** Počítáním dvěma způsoby dokažte, že pro přirozené  $n$  platí

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

**Příklad 4.** Má-li rovinný graf celkem 12 stěn, každá z nich je pětiúhelník a každý vrchol má stupeň 3, kolik má vrcholů?

**Příklad 5.** Mějme matici  $A$  o rozměrech  $n \times n$  takovou, že  $A_{i,j} = ij$ . Spočítejte dvěma způsoby součet všech jejích prvků a dokažte tím vzorec  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ .

**Příklad 6.** Spočítejte počet koster úplného bipartitního grafu  $K_{n,m}$  za použití věty o determinantu Laplaciánu.