Kombonatorika a Grafy 1 - Cvičení 1

Jan Soukup

3-4.10.2022
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG/

1 Opakování asymptotické notace

Definice 1. *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce (zpravidla kladné), pak pomocí zápisu*

$$f(x) = O(g(x))$$

značíme, že existují konstanty $x_0 \in \mathbb{R}^+$ a $M \in \mathbb{R}^+$ takové že $0 \leq f(x) \leq M \cdot g(x)$, pro všechna $x \geq x_0$.

Toto značení můžeme přirozeně rozlišit i pro funkce s definičním oborem, který je podmnožinou $\mathbb{R}$ (například $\mathbb{N}$).

Jinými slovy nám to říká, že když zapomene na začátek definičního oboru, tak funkce f je vždy nejvýše konstanta-krát větší než funkce g. Jinými slovy f roste nejvýše tak rychle jako g.

Je dobré si uvědomit, že v zápisu $f(x) = O(g(x))$ implicitně předpokládáme, že $x \to \infty$. Na analýze jste možná viděli, že stejný zápis se občas používá i pro x jdoucí k jinému číslu, což pak může být matoucí (například $n = O(n^2)$ pro $n \to \infty$, ale $n^2 = O(n)$ pro $n \to 0^+$). Nicméně v informatice se většinou zajímáme o chování v nekonečnu (algoritmy a podobně) a proto budeme vždy předpokládat $x \to \infty$.

Pokud chceme ukázat, že $f(x) \neq O(g(x))$, tak musíme ukázat, že pro všechna $x_0, M \in R^+$ existuje $x \geq x_0$ takové, že $f(x) > M \cdot g(x)$ (případně že $f(x)$ je záporné).

Příklad 1. Rozhodněte (a dokažte) zda platí

(1) $x^2 + 7x + 2 = O(x^2)$

(2) $3x^2 + 7x\ln(x) = O(x^2)$

(3) $n^3 \cdot n! = O(n^n)$

(4) $n \cdot 2^n = O(n!)$

(5) $n^3 = O(10 \cdot n^2)$

Kromě O-notace používáme i jiné notace.

Definice 2. *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce (zpravidla kladné), pak*

značení	*definice*
$f(x) = o(g(x))$	$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
$f(x) = \Omega(g(x))$	$g(x) = O(f(x))$
$f(x) = \Theta(g(x))$	$f(x) = O(g(x))$ *a* $g(x) = O(f(x))$

Příklad 2. Rozhodněte (a dokažte) zda platí

(1) $n^2 = \Theta(\frac{n^2}{\log(n)})$

(2) $n^2 = \Omega(\frac{n^2}{\log(n)})$

(3) $5 = \Omega(1)$

(4) $5 = o(1)$

(5) $10n^2 = o(n^3)$

2 Opakování kombinačních čísel

Definice 3. Faktoriál *čísla* $n \geq 1$ *definujeme jako počet různých uspořádání* n *objektů. Tedy* $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. *Navíc definujeme* $0! = 1$.

Definice 4. *Kombinačním číslem* $\binom{n}{k}$, *pro* $n \geq k \geq 0$, *rozumíme počet různých možností jak vybrat neuspořádanou* k*-tici z* n *objektů. Ekvivalentně,* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ *(Rozmyslete si tuto ekvivalenci).*

Příklad 3. Definujme pascalův trojúhelník jako následující uspořádání čísel, kde každé číslo je vždy součtem dvou nad ním (n označuje číslo řádku).

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

- Rozmyslete si souvislost s binomickými koeficienty a dokažte, že
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$
.
- Dokažte, že $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Tvrzení 1 (Binomická věta)**.** Pro všechna čísla a, b a každé přirozené číslo n platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Příklad 4. Rozmyslete si důkaz binomické věty pomocí roznásobení n činitelů $(a + b)$ (po roznásobení vznikne součet, kolikrát se tam objeví každý sčítanec?).

Příklad 5. Dokažte, že platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

pro $n \geq k \geq 1$. Kombinatorickou úvahou se snáze dokazuje rovnost

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

.

Příklad 6. Spočítejte

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

Příklad 7 (*)**.** Kombinatorickou úvahou dokažte

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

3 Opakování grafů

Příklad 8. Zopakujte si klasické definice grafu, podgrafu, indukovaného podgrafu, rovinného grafu, grafové souvislosti, ...

Příklad 9. Je podgraf souvislého grafu nutně souvislý? Je indukovaný podgraf souvislého grafu nutně souvislý? Jak vypadá graf, jehož všechny indukované podgrafy jsou souvislé?

Příklad 10. Ukažte, že každý graf G, jenž má minimální stupeň $\delta(G) \geq d$, obsahuje cestu P_d jako podgraf. Musí ji obsahovat i jako indukovaný podgraf?

Tvrzení 2 (Eulerova formule)**.** Pro libovolné nakreslení souvislého rovinného grafu $G = (V, E)$ platí

$$|V| - |E| + s = 2,$$

kde s označuje počet stěn nakreslení.

Důsledek 3. Pro rovinný graf $G = (V, E)$ s alespoň třemi vrcholy platí $|E| \leq 3|V| - 6$.

Příklad 11. Pro jaké hodnoty k existuje rovinný graf, který má všechny stupně rovné k?

Příklad 12. Ukažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy nemůže být rovinný.