Matematická analýza 1 - Úkol 2

Jan Soukup

odevzdat do 4.4.2022

Příklad 1 (2 body)**.** Pro libovolnou posloupnost (a_n), která nemá limitu, najděte její pokrytí nekonečně mnoha konvergentními podposloupnostmi, které konvergují ke stejné limitě a. Neboli podposloupnosti $(a_n^{(i)}) \subseteq (a_n)$ pro $i \in \mathbb{N}$ takové, že $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_n^{(i)}) = (a_n)$ a $\lim\limits_{n \to \infty} a_n^{(i)} = a$ pro každé $i \in \mathbb{N}$.

(Pokud to neumíte dokázat obecně, zkuste dokázat nejdříve pro posloupnost $a_i = (-1)^i$)

Příklad 2 (2 body)**.** Rozhodněte, zdali následující řady konvergují, nebo divergují.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n n^2 + 15}$,

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+k)}$ pro $k \in \mathbb{Z}_0^+$.

Příklad 3 (2 body)**.** Určete limitu následující posloupnost, případě vyvraťte existenci limity.

$$a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - a_n\right)^2$$

Příklad 4 (2 bod)**.** Dokažte z definice tvrzení $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 1}{x} = -\infty$.