Matematická analýza 1 - Cvičení 9

Jan Soukup

11.4.2022

1 Opakování

Definice 1. *Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$, $b \in M$ a b je oboustranný limitní bod M.* Derivace funkce f v bodě b *je limita*

$$f'(b) := \lim_{h\to 0} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} = \lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Derivace funkce f v bodě a zprava (zleva) *je příslušná jednostranná limita pro $h \to 0^+$ ($h \to 0^-$), resp. $x \to a^+$ ($x \to a^-$). Tyto jednostranné derivace značíme $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.*

Tvrzení 1 (Základní pravidla pro derivace)**.**

(1) $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

(2) $(fg)' = f'g + fg'$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

(4) $(f(g))' = f'(g)g'$

Tvrzení 2 (Derivace základních funkcí)**.**

(1) $(x^n)' = nx^{n-1}$

(2) $(e^x)' = e^x$

(3) $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

(4) $(\sin(x))' = \cos(x)$

(5) $(\cos(x))' = -\sin(x)$

Tvrzení 3 (Derivace inverzní funkce)**.** Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $a \in J$ jeho vnitřní bod, $f\colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá a ryze monotónní funkce (tj. rostoucí nebo klesající) a $f(a) = b$. Pak

(1) Když má f v a nenulovou derivaci $f'(a)$, potom inverzní funkce $f^{<-1>}$ má v b derivaci

$$\left(f^{<-1>}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{<-1>}(b)\right)}.$$

(2) Když $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající), potom $\left(f^{<-1>}\right)'(b) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Tvrzení 4 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, funkce $f, g\colon P(a,\delta) \to \mathbb{R}$ mají na $P(a,\delta)$ vlastní derivaci a $g'(x) \neq 0$ na $P(a,\delta)$.

(1) Pokud $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$,
pak i $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.

(2) Pokud $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak i $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.

Totéž platí pro jednostranné limity $x \to a^-$ a $x \to a^+$.

2 Příklady

Příklad 1. Určete hodnotu derivace následující funkce na celém $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

Příklad 2. Spočítejte derivaci podle věty o derivaci inverzní funkce

(1) $\sqrt[3]{x}$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

(2) $\arctan(x)$ na $\mathbb{R}$

Příklad 3. Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítejte následující limity

(1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} x - \ln(x)$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)-x}{x^2}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$

Příklad 4. Určete lokální extrémy následujících funkcí

(1) $x^3 - x$

(2) $\ln(|x| - x^2)$

(3) $x^2 \cdot e^{-x}$

Příklad 5. Vyšetřete průběh funkce $\frac{2x}{1-x^2}$ a nakreslete její graf.

Příklad 6. Dokažte následující tvrzení:

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\colon e^x \geq 1 + x$

(2) $\forall x \in (-1, \infty)\colon\ \ln(x+1) \leq x$

(3) $\forall x \in (-1, \infty)\colon 1 + x \geq e^{\frac{x}{1+x}}$ nebo ekvivalentně $\forall x \in (-1, \infty)\colon\ \ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1}$

(4) $\forall x \geq 0\colon\ \sin(x) \leq x$

Příklad 7 (*). Spočítejte derivaci následují funkce na $\mathbb{R}$, případně dokažte, že derivace v nějakých bodech neexistuje.

(1) $\sqrt{1 - e^{-x^2}}$