Matematická analýza 1 - Cvičení 6

Jan Soukup

21.3.2022

1 Opakování

Definice 1. *Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $L \in \mathbb{R}^*$, pokud.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in P(a, \delta) \implies f(x) \in U(L, \varepsilon).$$

Tvrzení 1 (Heineho definice limity funkce)**.** Nechť f je funkce definovaná na prstencovém okolí $P(b, \Delta)$ bodu $b \in \mathbb{R}^*$ pro nějaké $\Delta > 0$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $\lim_{x \to b} f(x) = L$;

(2) pro každou posloupnost $(x_n) \subseteq P(b, \Delta)$, pro níž platí $\lim_{n \to \infty} x_n = b$, platí také $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Tvrzení 2 (Aritmetika limit funkcí)**.** Nechť $a, A, B \in \mathbb{R}^*$, nechť f a g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí $P(a, \Delta)$ bodu a, a nechť platí $\lim_{x \to a} f(x) = A$ a $\lim_{x \to a} g(x) = B$. Potom

(a) $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = A + B$, je-li tento součet definován.

(b) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = AB$, je-li tento součin definován.

(c) Nechť je navíc $g(x)$ nenulová na nějakém prstencovém okolí bodu a.
Pak $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = A/B$, je-li tento podíl definován.

Tvrzení 3 (dva funkční strážníci)**.** Nechť $A, L \in \mathbb{R}^*$, A je limitní bod množiny $M \subset R$ a jsou dány funkce $f, g, h : M \to R$ splňující podmínky, že $\lim_{x \to A} f(x) = \lim_{x \to A} h(x) = L$ a že pro nějaké δ je $\forall x \in P(A, \delta) \cap M : g(x) \in I(f(x), h(x))$. Pak též $\lim_{x \to A} g(x) = L$.

Tvrzení 4 (Limita složené funkce)**.** Nechť $A, B, C \in \mathbb{R}^*$, nechť $g(x)$ je funkce splňující $\lim_{x \to A} g(x) = B$ a $f(x)$ je funkce splňující $\lim_{x \to B} f(x) = C$. Navíc nechť je splněna aspoň jedna z podmínek P1 a P2:

P1. Funkce $f(x)$ je spojitá v B (jinými slovy, $f(B) = \lim_{x \to B} f(x) = C$).

P2. Na nějakém prstencovém okolí $P(A, \eta)$ funkce $g(x)$ nenabývá hodnotu B, tj. $B \notin g(P(A, \eta))$.

Potom

$$\lim_{x \to A} f(g(x)) = C.$$

2 Příklady

Příklad 1. Spočítejte limity následujících funkcí z definice. Případně ukažte, že neexistují (například pomocí Heineho věty/z definice/ jinak):

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-12}$

(2) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1}$

(3) $\lim_{x\to 3} x^2 - 2$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}$

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

V následujících úlohách můžete používat následující limity, které si dokážeme později. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Příklad 2. Spočítejte limity, nebo ukažte, že limita neexistuje:

(1) $\lim_{x\to 0} 1 + x\cos(x)$

(2) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-3}{2x^2-1}$

(4) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{x}$

(5) $\lim_{x\to 0} \sqrt{1+x\cos(x)}$

(6) $\lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(7) $\lim_{x\to\infty} \ln(|x|)$

(8) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$

(9) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(10) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$

(11) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

Příklad 3. Určete limitu posloupnosti $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n^3+3n^2}}$.