Matematická analýza 1 - Cvičení 5

Jan Soukup

14.3.2022

1 Opakování

Definice 1 (Řada a její součet)**.** Nekonečná řada (reálných čísel) *je výraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots ,$$

kde $(a_n)_{n\geq 1}$ *je posloupnost reálných čísel.*

Částečný součet řady*, přesněji její n-tý částečný součet* s_n*, je součet jejích prvních* n *členů. Pro řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je tedy* $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *a pro řadu* $\sum_{k\geq 8} c_k$ *je* $s_n = c_8 + c_9 + \cdots + c_{n+7}$*.*

Pokud existuje vlastní limita posloupnosti (s_n) *částečných součtů dané řady, mluvíme o* konvergentní řadě *a limita* $\lim_{n\to\infty} s_n$ *je jejím* součtem*. Pokud* $\lim s_n$ *neexistuje nebo je nevlastní, je daná řada* divergentní.

Definice 2. *Řekneme, že funkce* f *má v bodě* $a \in \mathbb{R}^*$ *limitu* $L \in \mathbb{R}^*$*, pokud.*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in P(a, \delta) \implies f(x) \in U(L, \varepsilon).$$

Tvrzení 1 (Heineho definice limity funkce)**.** Nechť f je funkce definovaná na prstencovém okolí $P(b, \Delta)$ bodu $b \in \mathbb{R}^*$ pro nějaké $\Delta > 0$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $\lim_{x\to b} f(x) = L$;

(2) pro každou posloupnost $(x_n) \subseteq P(b, \Delta)$, pro níž platí $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, platí také $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

2 Příklady

Příklad 1. Spočtěte limitu posloupnosti (a_n) zadané rekurencí

$$a_{n+1} = \frac{5}{6 - a_n}$$

a první hodnotou $a_1 = 4$.

Příklad 2. Spočtěte limitu posloupnosti (a_n) zadané rekurencí

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{4} + 1$$

a první hodnotou $a_1 = 0$.

Příklad 3. Podle toho, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, spočítejte limitu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+2^n}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n+4^n}}$. Rozmyslete si, jak by se původní limita dokazovala pomocí binomické věty (těžší).

Příklad 4. Ukažte, že součet harmonické řady je neomezený, tj. posloupnost součtů $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ má limitu $+\infty$.

Příklad 5. Určete, zdali řada konverguje, nebo diverguje:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5+4}$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Příklad 6. Pomocí definice $e^x = \lim_{i\to\infty}\left(1+\frac{x}{i}\right)^i$, určete limitu $\lim_{i\to\infty}\left(1+\frac{2}{i}\right)^{i+1}$. Jakou větu používáte?

Příklad 7. Spočítejte limity následujících funkcí z definice. Případně ukažte, že neexistuje (například pomocí Heineho věty/z definice/ jinak):

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-12}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 3} x^2-2$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

Příklad 8 (*). Spočítejte limitu následující posloupnosti v závislosti na přirozených parametrech k, l.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l}$$

.