

Matematická analýza 1 - Cvičení 4

Jan Soukup

7.3.2022

1 Opakování

Tvrzení 1 (Aritmetika limit). Nechť $(a_n), (b_n)$ jsou posloupnosti reálných čísel s $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Pak

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$, je-li výraz na pravé straně definován,
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = AB$, je-li výraz na pravé straně definován,
- (3) pokud $b_n \neq 0$ pro každé $n > n_0$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = A/B$, je-li výraz na pravé straně definován.

Tvrzení 2 (O dvou polícajtech). Nechť posloupnosti $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ splňují, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \in \mathbb{R}$ a pro každé $n > n_0$ je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Pak (c_n) konverguje a $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Definice 1 (Řada a její součet). Nekonečná řada (reálných čísel) je výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

kde $(a_n)_{n \geq 1}$ je posloupnost reálných čísel.

Částečný součet řady, přesněji její n -tý částečný součet s_n , je součet jejích prvních n členů. Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedy $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ a pro řadu $\sum_{k \geq 8} c_k$ je $s_n = c_8 + c_9 + \dots + c_{n+7}$.

Pokud existuje vlastní limita posloupnosti (s_n) částečných součtů dané řady, mluvíme o konvergentní řadě a limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ je jejím součtem. Pokud $\lim s_n$ neexistuje nebo je nevlastní, je daná řada divergentní.

2 Příklady

Příklad 1. Seřadte následující funkce podle toho, jak rychle rostou $n^n, k^n, n!, n^k, n$. (pro $k > 1$)

Příklad 2. Určete následující limity, pomocí věty o aritmetice limit a věty o dvou strážnících:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n-1}$ (Nemůžeme použít aritmetiku limit, použijte strážníky nebo definici)
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1}$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1} \text{ (rozšiřte zlomek výrazem typu } \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} \text{)}$$

Příklad 3. Určete množinu hromadných bodů posloupnosti

$$a_1 = 1, a_n = \frac{1}{\text{„nejmenší dělitel } n \text{ větší než } 1\text{“}}$$

Příklad 4. Spočtěte limitu posloupnosti (a_n) zadané rekurencí

$$a_{n+1} = \frac{5}{6 - a_n}$$

a první hodnotou $a_1 = 4$.

Příklad 5. Spočtěte limitu posloupnosti (a_n) zadané rekurencí

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{4} + 1$$

a první hodnotou $a_1 = 0$.

Příklad 6. Ukažte, že součet harmonické řady je neomezený, tj. posloupnost součtů $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ má limitu $+\infty$.

Příklad 7. Určete, zdali řada konverguje, nebo diverguje:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5 + 4}.$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1},$$

Příklad 8 (*). Spočítejte limitu následující posloupnosti v závislosti na přirozených parametrech k, l .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l}$$

Příklad 9 (*). Pomocí binomické věty a definice $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ dokažte, že $\lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = e$.