

Matematická analýza 1 - Cvičení 3

Jan Soukup

28.2.2022

1 Opakování

Definice 1. Nechť (a_n) je reálná posloupnost a $L \in \mathbb{R}^*$. Pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : n \geq n_0 \implies a_n \in U(L, \varepsilon),$$

řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu L .

$U(L, \varepsilon)$ značí otevřený interval okolo L do vzdálenosti ε , případně interval $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$ pokud $L = \infty$ a obdobně pro $L = -\infty$.

Pro konečné L (takové limitě říkáme vlastní) můžeme toto ekvivalentně přepsat jako

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : n \geq n_0 \implies L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

Podobně pro $L = \infty$ (takové limitě říkáme nevlastní) to můžeme přepsat jako

$$\forall c > 0 \exists n_0 : n \geq n_0 \implies c < a_n.$$

Tvrzení 1 (Aritmetika limit). Nechť $(a_n), (b_n)$ jsou posloupnosti reálných čísel s $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Pak

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$, je-li výraz na pravé straně definován,
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = AB$, je-li výraz na pravé straně definován,
- (3) pokud $b_n \neq 0$ pro každé $n > n_0$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = A / B$, je-li výraz na pravé straně definován.

Tvrzení 2 (O dvou polícajtech). Nechť posloupnosti $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ splňují, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \in \mathbb{R}$ a pro každé $n > n_0$ je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Pak (c_n) konverguje a $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Tvrzení 3 (Bernoulliho nerovnost). Pro každé reálné číslo $x \geq -1$ a celé číslo $n \geq 0$ platí, že

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

2 Příklady

Příklad 1. Podle definice určete limitu následujících posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (nebo dokažte, že neexistuje):

- (1) $a_n = 5/n$
- (2) $a_n = (-1)^n$
- (3) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$(4) a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$(5) a_n = \cos((-1)^n)$$

$$(6) a_n = \log n$$

Příklad 2. Určete limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ v závislosti na reálném parametru q . Můžete použít Bernoulliovu nerovnost.

Příklad 3. Určete následující limity, pomocí věty o aritmetice limit:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{2}{n^2}\right) \cdot \left(5 + \frac{1}{n}\right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 6n}{n^2 - 7n + 7}$$

Příklad 4. Dokažte pomocí Bernoulliovy nerovnosti, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1$.

Příklad 5. Určete následující limity, pomocí věty o aritmetice limit a věty o dvou strážnících:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor n \rfloor}{n}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} \text{ (Nemůžeme použít aritmetiku limit, použijte strážníky nebo definici)}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!}$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1}$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1} \text{ (rozšiřte zlomek výrazem typu } \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}})$$

Příklad 6. Seřadte následující funkce podle toho, jak rychle rostou n^n , k^n , $n!$, n^k , n . (pro $k > 1$)

Příklad 7. Nalezněte posloupnosti (a_n) a (b_n) , že jedna je podposloupností druhé a naopak, ale $(a_n) \neq (b_n)$.

Příklad 8 (*). Pomocí binomické věty a definice $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ dokažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = e$.