

# Matematická analýza 1 - Cvičení 2

Jan Soukup

21.2.2022

## 1 Opakování

**Definice 1** ((ne)spočetné množiny). *Pojmenujeme následující druhy množin  $X$ .*

- (1)  $X$  je spočetná, když existuje bijekce  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ .
- (2)  $X$  je nejvýše spočetná, je-li konečná nebo spočetná.
- (3)  $X$  je nespočetná, když není nejvýše spočetná.

**Definice 2.** *Nechť  $M$  je množina s uspořádáním  $\succcurlyeq$  a  $A \subseteq M$ .*

- *Množina  $A$  je shora omezená pokud existuje  $m \in M$  takové, že  $m \succcurlyeq a$  pro každý prvek  $a \in A$ . Takovému  $m$  říkáme horní závora množiny  $A$ .*
- *Prvek  $m \in M$  je supremum množiny  $A$ , pokud  $m$  je nejmenší horní závora  $A$ . Zapisujeme  $m = \sup A$ .*
- *Množina  $A$  je zdola omezená pokud existuje  $m \in M$  takové, že  $a \succcurlyeq m$  pro každý prvek  $a \in A$ . Takovému  $m$  říkáme dolní závora množiny  $A$ .*
- *Prvek  $m \in M$  je infimum množiny  $A$ , pokud  $m$  je největší dolní závora  $A$ . Zapisujeme  $m = \inf A$ .*

## 2 Příklady

Rozmyslete si, že pokud je prvek maximem nějaké množiny, tak je i supremem. Podobně pro minimum a infimum.

**Příklad 1.** Určete infima, suprema, minima, maxima následujících množin (pokud existují). Množiny berte jako podmnožiny  $\mathbb{R}$ :

- $M = \{\frac{-1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$
- $M = \{q \mid q < \sqrt{3}, q \in \mathbb{Q}\}$
- $M = \{\frac{p}{p+q} \mid p, q \in \mathbb{N}\}$
- $M = \{n^{(-1)^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $M = \{\cos((n + \frac{1}{n})\pi) \mid n \in \mathbb{N}\}$

**Příklad 2.** Nechť  $p(k, q) = \frac{10^k q!}{10^k}$ , kde  $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$  pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$ . Najděte infimum a supremum množiny  $P = \{p(n, \frac{4}{3}) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ , pokud existují najděte i minimum a maximum.

**Příklad 3.** Najděte příklad lineárně uspořádané množiny s nejmenším a největším prvkem, ve které existuje podmnožina, která nemá supremum ani infimum.

**Příklad 4.** Pro neprázdné a shora i zdola omezené množiny reálných čísel  $A$  a  $B$ , se pokuste vyjádřit co nej přesněji suprema a infima následujících množin pomocí suprem a infim množin  $A$  a  $B$ .

- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $A \setminus B$
- $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

**Příklad 5.** Dokažte:

- (1) Množina všech podmnožin přirozených čísel není spočetná.
- (2) Množina  $\mathbb{Z}$  všech celých čísel je spočetná
- (3) Množina  $\mathbb{Q}$  všech racionálních čísel je spočetná.
- (4) Množina všech iracionálních čísel je nespočetná.
- (5) Množina všech funkcí  $\{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N}$  je spočetná.
- (6) Množina všech konečných podmnožin přirozených čísel je spočetná.

**Příklad 6.** Dokažte, že  $\mathbb{Q}$  je husté v  $\mathbb{R}$ , tedy  $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})(a < b \implies (\exists q \in \mathbb{Q})(a < q \wedge q < b))$ .

**Příklad 7.** Rozhodněte, zdali jsou následující posloupnosti monotónní a pokud ano, určete, jestli jsou rostoucí, klesající, neklesající nebo nerostoucí.

- $\{2n + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
- $\left\{\frac{n+1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- $\{\sin(n)\}_{n=1}^{\infty}$
- $\left\{\frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$