Matematická analýza 1 - Cvičení 13

Jan Soukup

16.5.2022

1 Opakování

Definice 1. *Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je daná funkce. Pokud má funkce $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ na (a,b) derivaci a ta se rovná $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a,b)$, řekneme, že F* je na intervalu (a,b) primitivní funkcí k funkci *f.*

Definice 2 (Newtonův integrál)**.** *Předpokládejme, že máme dáno $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$. Funkce $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ má na intervalu (a,b)* Newtonův integrál*, když má na (a,b) primitivní funkci F a ta má vlastní jednostranné limity*

$$F(a^+) = \lim_{x \to a^+} F(x) \quad a \quad F(b^-) = \lim_{x \to b^-} F(x).$$

Symbolem $[F]_a^b$ označme rozdíl $F(b^-) - F(a^+)$. Newtonův integrál *funkce f na intervalu (a,b) pak definujeme jako*

$$(N) \int_a^b f(x)\,dx := [F]_a^b = F(b^-) - F(a^+) = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

Tvrzení 1. Nechť je funkce $G\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ na intervalu (α, β) primitivní k funkci $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ a navíc platí, že $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$ a φ má na (α,β) nenulovou vlastní derivaci. Pak na intervalu (a,b) platí, že

$$\int f(x)\ dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c.$$

Tvrzení 2. Necht' $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ má na $[a,b]$ Riemannovsky integrovatelnou derivaci f'. Pak

$$\text{délka}((x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Tvrzení 3 (Objem rotačního tělesa)**.** Mějme spojitou funkci $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$. Potom objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce f kolem osy x je roven

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Tvrzení 4 (Povrch pláště rotačního tělesa)**.** Mějme spojitou funkci $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$, která má na tomtu intervalu také spojitou derivaci. Potom povrch pláště tělesa, které vznikne rotací grafu funkce f kolem osy x je roven

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Tvrzení 5 (Interální kritérium)**.** Necht' $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ je nerostoucí nezáporná funkce. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje právě tehdy, když platí

$$\lim_{b \to \infty} \int_1^b f < \infty.$$

Definice 3 („Známé primitivní funkce“)**.**

(a) $\int x^a = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$ *pro* $a \neq -1$

(b) $\int \frac{1}{x} = \ln(|x|),\ x \in \mathbb{R}^+$ *nebo* $x \in \mathbb{R}^-$

(c) $\int \cos(x) = \sin(x)$

(d) $\int \sin(x) = -\cos(x)$

(e) $\int e^x = e^x$

(f) $\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)$

(g) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)\ , x \in (-1, 1)$

2 Příklady

Příklad 1. Spočítejte obsah

(a) plochy pod parabolou $y = x^2$ na intervalu $[0, t]$, kde $t \in \mathbb{R}$.

(b) uzavřené plochy mezi křivkami $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ a $x = 2$.

(c) plochy pod grafem funkce $y = e^{-|x|}$ na intervalu $(-1, 1)$

(d) uzavřené plochy mezi křivkami $y = 1$ a $y = (x-1)(x-2)(x-3)+1$.

Příklad 2. Spočítejte obvod a obsah(*) jednotkového kruhu.

Příklad 3. Spočítejte délku křivky $y = \sqrt{x^3}$ na intervalu $[0, 1]$.

Příklad 4. Spočítejte povrch a objem jednotkové koule.

Příklad 5. Spočítejte povrch pláště a objem

(a) válce s výškou h a poloměrem podstavy r

(b) kužele s výškou h a poloměrem podstavy r

Příklad 6. Rozhodněte zda následující řady konvergují, či divergují

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2(n)}$

Příklad 7. (*) Najděte primitivní funkci na intervalu $(0, \pi)$ k

$$\frac{1}{\sin(x)}$$